GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2020

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL II

NASIENRIGLYNE

Tyd: 1 uur | 100 punte

Hierdie nasienriglyne word voorberei vir gebruik deur eksaminatore en hulpeksaminatore. Daar word van alle nasieners vereis om 'n standaardiserings-vergadering by te woon om te verseker dat die nasienriglyne konsekwent vertolk en toegepas word tydens die nasien van kandidate se skrifte.

Die IEB sal geen gesprek aanknoop of korrespondensie voer oor enige nasienriglyne nie. Daar word toegegee dat verskillende menings rondom sake van beklemtoning of detail in sodanige riglyne mag voorkom. Dit is ook voor die hand liggend dat, sonder die voordeel van bywoning van 'n standaardiseringsvergadering, daar verskillende vertolkings mag wees oor die toepassing van die nasienriglyne.

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

1.1 $\dfrac{\binom{6}{3}+\binom{5}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{14}{3}}=\dfrac{31}{364}$ of $(0{,}0852)$

1.2 (a) $P(X>3)=\binom{5}{4}(0{,}7)^4(0{,}3)+\binom{5}{5}(0{,}7)^5(0{,}3)^0=0{,}5282$

(b) (i) $X\sim N(42;12{,}6)$

$$P(X\geq 40)\to P(X>39{,}5)$$
$$=P\left(Z>\frac{39{,}5-42}{\sqrt{12{,}6}}\right)$$
$$=P(Z>-0{,}7)$$
$$=0{,}5+0{,}2580$$
$$=0{,}7580$$

(ii) Aangesien $np=42>5$ en $nq=18>5$, kan die normaal-benadering gebruik word.

(iii) Dit maak voorsiening vir simmetrie en nie vir die verdeling om óf positief óf negatief skeef te wees nie.

VRAAG 2

2.1 $X\sim N(2\sigma;\sigma^2)$

$$P(X>5{,}2)=0{,}9$$
$$\therefore -1{,}28=\frac{5{,}2-2\sigma}{\sigma}$$
$$-1{,}28\sigma=5{,}2-2\sigma$$
$$0{,}72\sigma=5{,}2$$
$$\therefore \sigma=7{,}22 \Rightarrow \mu=14{,}44$$

2.2 (a) 'n 94%-vertrouensinterval vir p is:

$$0{,}2\pm1{,}88\sqrt{\frac{(0{,}2)(0{,}8)}{100}}$$
$$(0{,}1248;0{,}2752)$$

(b) As dobbelsteen onsydig is, sal elke waarde 'n waarskynlikheid van 0,1667 hê om gegooi te word. Aangesien 0,1667 binne die vertrouens-interval is, sal die dobbelsteen nie as sydig beskou word nie.

VRAAG 3

3.1 (a) $E[X] = 0,67$

$\therefore 1(0,35) + 2p + 3q = 0,67$

$2p + 3q = 0,32$

$p + q + 0,85 = 1$

$\therefore p + q = 0,15$ en $2p + 3q = 0,32$

Los gelyktydig op:

$p = 0,13$ en $q = 0,02$

(b) $Var(X) = (1)^2(0,35) + (2)^2(0,13) + (3)^2(0,02) - (0,67)^2$

$= 0,6011$

$\sigma_x = 0,7753$

3.2 $g(x)$ het 'n oppervlakte groter as 1 en $h(x)$ het 'n negatiewe waarskynlikheid.

3.3 (a) *X*, die mediaan is waar die oppervlakte in die helfte gesny word en aangesien daar 'n veel groter oppervlakte regs van die middel van die *x*-waardes is, sal die mediaan nader aan 2 wees.

(b) *W*, aangesien hoër en laer waardes meer waarskynlik is.

(c) $P(T < 0,5) = \int_0^{0,5} \left(-\frac{1}{2}x + 1\right) dx = \frac{7}{16}$

VRAAG 4

4.1 $H_0 : \mu = 12$

$H_1 : \mu < 12$

4.2 Toetsstatistiek: $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$-1,96 < \dfrac{11,7 - 12}{\frac{0,5}{\sqrt{n}}} < -1,645$

$-1,96 < \sqrt{n}\left(\dfrac{11,7 - 12}{0,5}\right) < -1,645$

$2,742 < \sqrt{n} < 3,267$

$7,52 < n < 10,67$; $n \in Z$

or $8 \leq n \leq 10$; $n \in Z$

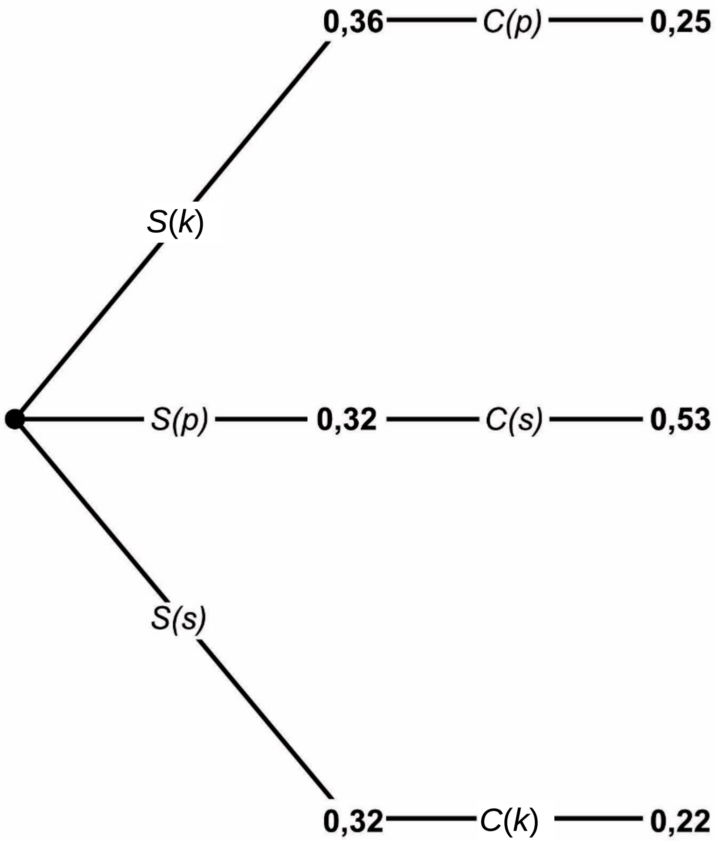
VRAAG 5

5.1 $P(\text{Charlie wen}) = P(R_c)P(S_s) + P(P_c)P(R_s) + P(S_c)P(P_s)$

$= (0,22)(0,32) + (0,25)(0,36) + (0,53)(0,32)$

$= 0,33$

OF:



5.2 (a) $20 \times 19 \times 18 = 6\,840$

(b) $20^3 - 20 = 7\,980$

OF

(a) + 'n student wen twee pryse

$= 6\,840 + 3(20 \times 19)$

$= 7\,980$

Totaal vir Module 2: 100 punte

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

1.1 $0,0775 = \left(1+\frac{r}{12}\right)^{12} - 1$

$r = 0,0749$

$$F_{37} = \frac{1\,500\left[\left(1+\frac{0,0749}{12}\right)^{37} - 1\right]}{\frac{0,0749}{12}}$$

$= \text{R}62\ 214,60 \quad \text{of} \quad \text{R}62\ 212,31\ (\text{presiese } r)$

$= \text{R}62\ 210\ \ (\text{naaste } 10)$

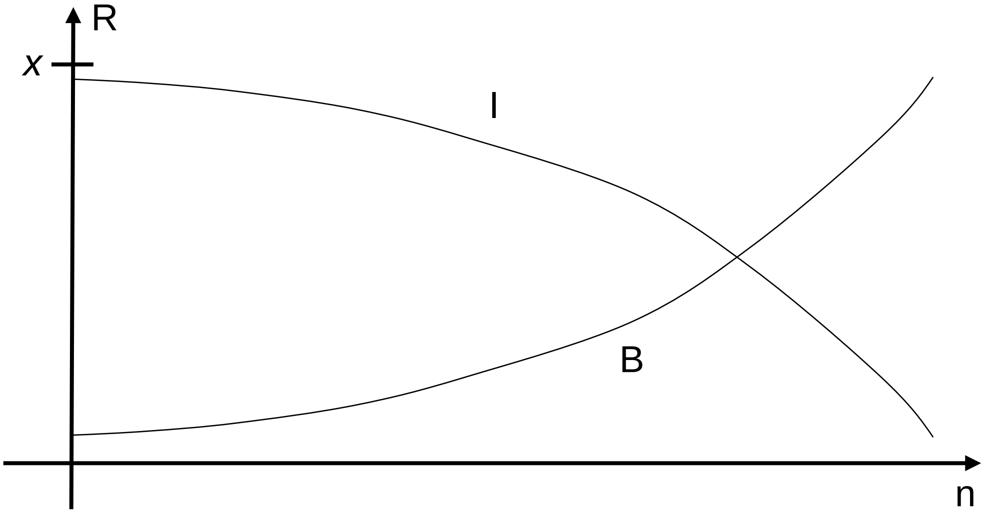
1.2 $$62\ 210\left(1+\frac{0,0749}{12}\right)^{48} + \frac{x\left[\left(1+\frac{0,0749}{12}\right)^{48} - 1\right]}{\frac{0,0749}{12}} = 206\ 530,90$$

$= \text{R}2\ 199,75 \quad \text{of} \quad \text{R}2\ 199,99...$

$\therefore x = \text{R}2\ 200\ (\text{naaste rand})$

VRAAG 2

2.1



Die bedrag wat vir rente, *I*, gebruik word, is 'n persentasie van die *OB* en dus volg dit die algemene vorm van *OB*. Die waarde van *B* = *x* – *I*. Die grafiek van *B* is dus *I* in die *x*-as gereflekteer en met *x* opgeskuif.

2.2 (a)

$$317\ 279{,}95 = \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0{,}1125}{12}\right)^{-132}\right]}{\frac{0{,}1125}{12}}$$

$$\therefore x = \text{R}4\ 200$$

(b)

$$P\left(1+\frac{0{,}1125}{12}\right)^{7} = \frac{4\ 200\left[1-\left(1+\frac{0{,}1125}{12}\right)^{-173}\right]}{\frac{0{,}1125}{12}}$$

$$\therefore P = \text{R}336146{,}51$$

(c) Reduksie in *OB*

$= 336146,51 - 317\ 279,95$

$= \text{R}18866,56$

Bedrag betaal

$= 41 \times 4\ 200$

$= \text{R}172\ 200$

Rente betaal

$= 172\ 200 - 18866,56$

$= \text{R}153333$

(d) $$317\ 279,95\left(1+\frac{0,1125}{12}\right)^2 = \frac{x\left[1-\left(1+\frac{0,1125}{12}\right)^{-130}\right]}{\frac{0,1125}{12}}$$

$= \text{R}4\ 312,59$

VRAAG 3

3.1 *b* is die gereelde betaling
F_0 is die aanvanklike bedrag in die rekening

3.2 26 200 = 15 000 *a* + *b* .... (1)
38 296 = 26 200 *a* + *b* .... (2)
(2) – (1): 12 096 = 11 200a
a = 1,08 en *b* = 10 000

3.3 *r* = 0,08 = 8%

VRAAG 4

4.1 Logaritmiese groei

4.2 0 = –0,0005S + 0,35
s = 700

4.3 *r* = 0,35

4.4 $S_{n+1} = S_n + 0,35S_n\left(1-\frac{S_n}{700}\right)$

4.5 8

VRAAG 5

5.1 (a) Hierdie term stel die vermindering in die sebrabevolking, per siklus, voor wat deur aanvalle deur leeus veroorsaak word.

(b) Vir ewewig van leeus:

$$L_E = L_E + f.b.Z_E.L_E - cL_E$$
$$\therefore 0 = L_E\left(f.b.Z_E - c\right)$$
$$\therefore Z_E = \frac{c}{f.b}$$

Vir ewewig van sebras:

$$Z_E = Z_E + aZ_E\left(1 - \frac{Z_E}{K}\right) - b.Z_E.L_E$$
$$\therefore 0 = Z_E\left[a\left(1 - \frac{Z_E}{K}\right) - bL_E\right]$$
$$\therefore bL_E = a\left(1 - \frac{Z_E}{K}\right)$$

Vervanging uit bogenoemde:

$$\therefore L_E = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{c}{K.f.b}\right)$$

(c)
$$8 = \frac{0{,}8}{0{,}05}\left(1 - \frac{1\,000}{K}\right)$$
$$K = 2\,000$$

5.2 (a) Toename in *a* impliseer 'n toename in ewewig van roofdier: B.

(b) Toename in *f* impliseer 'n toename in roofdier en 'n afname in prooi: C.

VRAAG 6

6.1 $x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-2)(x-6) = 0$

$x = 2$ *of* $x = 6$

$\therefore u_n = A.2^n + B.6^n$

$-1 = A + B$

$6 = 2A + 6B$

$3 = A + 3B$

$\therefore B = 2$ en $A = -3$

6.2 $(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2};\quad u_0 = 8;\quad u_1 = 21$

Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 $8 + 8y + 3x = 38$
$8y + 3x = 30$ ①

$20 + 4y + x = 46$
$4y + x = 26$ ②

① – 2×②

x = –22 y = 12

1.2 $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right)$

$2R_3 + 3R_2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 11 & 55 \end{array}\right)$

$R_3 / 11$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$

$R_2 - 3R_3$
$R_1 + 4R_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$

x = 10 y = –3 z = 5
Ook aanvaar 11z=55, met $2y + 3z = 9$, $1x - 4z = -10$.

VRAAG 2

2.1 (a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

Slegs antwoord is net ¾ maks toegeken.

2.2 $\begin{pmatrix} \cos 225 & -\sin 225 \\ \sin 225 & \cos 225 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

2.3 $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3+4\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{4+3\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

$3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta = \frac{-3+4\sqrt{3}}{2}$ en $-\cos 2\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 60^\circ$ $\therefore\ m = \sqrt{3}$

VRAAG 3

3.1 (a) Waar

(b) Onwaar, verander teken

(c) Waar

3.2 (a) Ontwikkeling deur 'n ry/kolom wat die meeste nulle het

(b) p = –2 q = 2

(c) $-2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -2\left[4(2-3)-(3-9)+2(9-18)\right] + 2\left[3(1-4)-0+(8-3)\right]$$
$$= -2(-16)+2(-4)$$
$$= 24$$

VRAAG 4

4.1 (b) $\dfrac{n(n-1)}{2}$

4.2 Ja, elke nodus het gelyke grade

4.3 C

4.4 Figuur 1 en Figuur 2

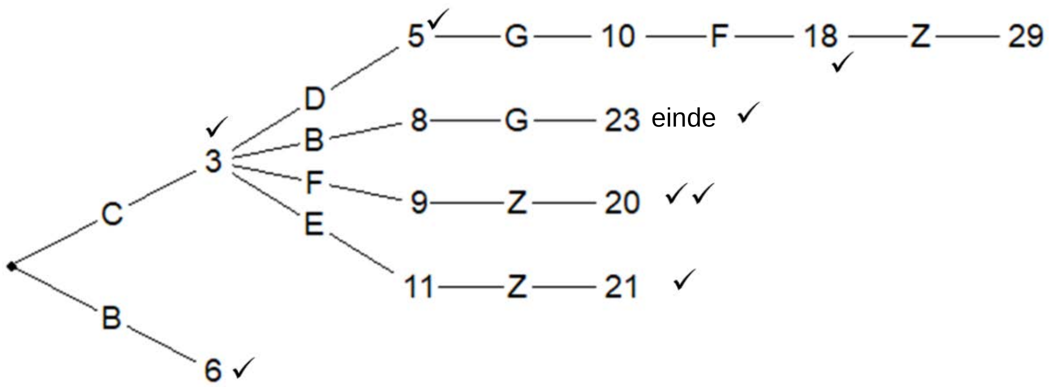
VRAAG 5

5.1 Verwyder nodus D

AC = 3	AC = 3
EF = 3	CBf = 5
CB = 5	cf = 6
CF = 6	fe = 3
FG = 8	fg = 8
EZ = 10	ez = 10
CD = 2	cd+gd = 7

Totaal = 42

5.2



C → F → Z = 20 minute

5.3 $B \rightarrow F \quad 2 < BF \leq 4 \;\; ; \;\; BF \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ BF = 3

BF = 4

$A \xrightarrow{6} B \xrightarrow{3} F \xrightarrow{11} Z \qquad \therefore\ 20$

$A \xrightarrow{6} B \xrightarrow{4} F \xrightarrow{11} Z \qquad \therefore\ 21$

Geen verskil nie of redenering gegrond op berekening

VRAAG 6

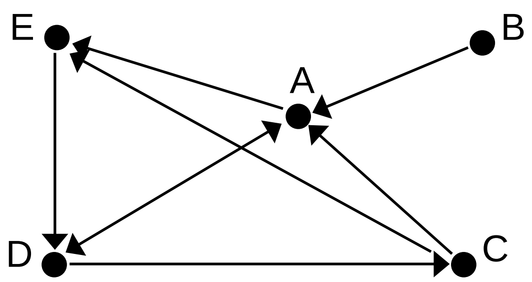
6.1

	A	B	C	D	E	
A	0	1	1	0	0	2
B	0	0	1	1	1	3
C	0	1	0	1	0	2
D	0	1	0	0	1	2
E	1	1	1	0	0	3

6.2 B en E

6.3 7 skakels

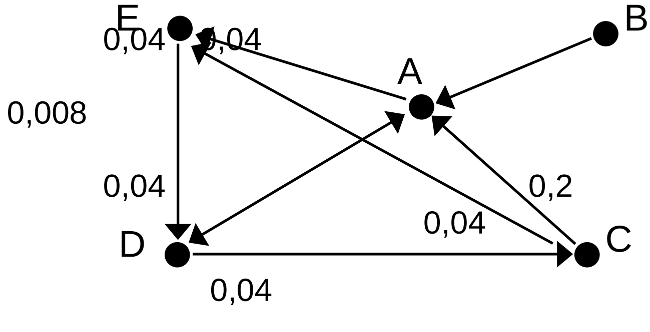
A_1 ; B_1 ; C_2 ; D_2 ; E_1



of

	A	B	C	D	E	
A	-	0	0	1	1	
B	1	-	0	0	0	
C	1	0	-	0	1	
D	1	0	1	-	0	
E	0	0	0	1	-	

6.4 (a)



(b) C en A

Totaal vir Module 4: 100 punte