GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2019

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA

NASIENRIGLYNE

Tyd: 2 uur | 200 punte

Hierdie nasienriglyne is opgestel vir gebruik deur eksaminators en hulp-eksaminators van wie verwag word om almal 'n standaardiseringsvergadering by te woon om te verseker dat die riglyne konsekwent vertolk en toegepas word by die nasien van kandidate se skrifte.

Die IEB sal geen bespreking of korrespondensie oor enige nasienriglyne voer nie. Ons erken dat daar verskillende standpunte oor sommige aangeleenthede van beklemtoning of detail in die riglyne kan wees. Ons erken ook dat daar sonder die voordeel van die bywoning van 'n standaardiseringsvergadering verskillende vertolkings van die toepassing van die nasienriglyne kan wees.

VRAAG 1

1.1 Los op vir $x \in \mathbb{R}$ sonder om 'n sakrekenaar te gebruik en toon alle berekeninge:

(a) $\left|x^2 - 12\right| = x$

$\therefore x^2 - 12 = x$ of $x^2 - 12 = -x$

$\therefore x^2 - x - 12 = 0$ of $x^2 + x - 12 = 0$

$\therefore (x-4)(x+3) = 0$ of $(x+4)(x-3) = 0$

$\therefore x = 4$ of -3 of -4 of 3

Kontrolering toon $x = 4$ of 3

(b) $e^x + 12e^{-x} = 8$

$\therefore e^{2x} - 8e^x + 12 = 0$

$\therefore \left(e^x - 2\right)\left(e^x - 6\right) = 0$

$\therefore e^x = 2$ of $e^x = 6$

$\therefore x = \ln 2$ of $x = \ln 6$

$\therefore x = 0{,}693$ of $1{,}792$

1.2 As $z = a + bi$ en $z^2 = 23 - 6z$, vind dan alle moontlike waardes van a en b.

$(a+bi)^2 = 23 - 6(a+bi)$

$\therefore a^2 + 2abi + b^2i^2 = 23 - 6a - 6bi$

$\therefore \left(a^2 - b^2\right) + (2ab)i = (23 - 6a) - (6b)i$

$\therefore 2ab = -6b$

$\therefore a = -3$ *of* $b = 0$

en $\left(a^2 - b^2\right) = 23 - 6a$

so, as $a = -3$ *dan is* $9 - b^2 = 42$

$\therefore b^2 = -32$ *(nie moontlik nie want b is 'n reële getal)*

$\therefore b = 0$

$\therefore a^2 = 23 - 6a$

$\therefore a = -3 + 4\sqrt{2}$

$\therefore a = 2{,}66$ *of* $-8{,}66$ *en* $b = 0$

1.3 Los $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + 4 = 0$ in $\mathbb{C}$ op indien gegee is dat $f(1-i) = 0$.

indien $1-i$ *'n wortel is, dan is* $1+i$ *ook een*

dus is $(x-(1-i))(x-(1+i))$ *'n faktor*

dus is $(x-1)^2 - i^2$ *'n faktor*

dus is $(x^2 - 2x + 2)$ *'n faktor*

deur inspeksie:

$x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x + 4 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 3x + 2) = (x^2 - 2x + 2)(x+1)(x+2)$

$\therefore x = 1-i$ of $1+i$ of -1 of -2

VRAAG 2

Gebruik volledige induksie om te bewys dat:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$$

ons wil bewys dat: $2 + 2^2 + \ldots.. + 2^n = 2^{n+1} - 2$

kom ons beskou eers $n = 1$

$LK = 2$ en $RK = 2^2 - 2 = 2$

dus is dit waar vir $n = 1$

neem aan dit is waar vir $n = k$

$\therefore 2 + 2^2 + \ldots.. + 2^k = 2^{k+1} - 2 \ (*)$

bytelling van die volgende term aan elke kant gee:

$$\begin{aligned} 2 + 2^2 + \ldots.. + 2^k + 2^{k+1} &= 2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} \\ &= 2 \times 2^{k+1} - 2 \\ &= 2^{k+2} - 2 \\ &= 2^{(k+1)+1} - 2 \end{aligned}$$

maar dit is net met $n = k+1$

dus het ons bewys dit is waar vir $n = k+1$

$\therefore$ *volgens die beginsel van volledige induksie is die resultaat waar vir* $n \in \mathbb{N}$

VRAAG 3

Bepaal $f'(x)$ uit eerste beginsels indien $f(x)=\sqrt{x+3}$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+3+h}-\sqrt{x+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+3+h}-\sqrt{x+3}}{h}\times\frac{\sqrt{x+3+h}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3+h}+\sqrt{x+3}} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+3+h}+\sqrt{x+3}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+3+h}+\sqrt{x+3}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+3}}
\end{aligned}
$$

VRAAG 4

4.1 Beskou die funksie: $f(x)=\dfrac{x^2+bx-6}{2x-a}$

Bepaal die waardes van a en b indien die funksie 'n vertikale asimptoot by $x=4$ en 'n skuins asimptoot van $y=\dfrac{1}{2}x+4$ het.

Vir 'n vertikale asimptoot by $x=4$ moet die noemer nul wees wanneer $x=4$ dus $a=8$

Nou:

$f(x)=(2x-8)\left(\dfrac{1}{2}x+4\right)+\text{res}\ (\text{waar res 'n konstante is})$

$\therefore f(x)=x^2+4x-32+\text{res}$

dus $b=4$

4.2 Bepaal die waardes van a en b indien die funksie $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{2x-3}$ 'n stasionêre punt by $(1;2)$ het.

ons weet dat $f(1)=2$ *en* $f'(1)=0$

dus $\dfrac{x^2+ax+b}{2x-3}=\dfrac{1+a+b}{-1}=2$ *of* $a+b=-3$

$\therefore f'(x)=\dfrac{(2x+a)(2x-3)-2\left(x^2+ax+b\right)}{(2x-3)^2}$

nou $f'(1)=(2+a)(-1)-2(1+a+b)=0$

vervanging van die waarde van $a+b$ *gee*:

$-2-a-2(1-3)=0$

$\therefore a=-2-2(-2)=2$ en $b=-5$

VRAAG 5

Beskou die funksie *f* wat soos volg gedefinieer word:

$$f(x)=\begin{cases} 0.5x+4 & x<-4 \\ 3 & -4\le x<-2 \\ 2 & x=-2 \\ 0.5x^2+1 & -2<x<2 \\ g(x) & x\ge 2 \end{cases}$$

Beantwoord die volgende vrae en gee noukeurig aandag aan die **notasie** wat jy gebruik:

5.1 Bepaal $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ indien dit bestaan. Indien nie, verduidelik waarom nie.

$\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=2$ *maar* $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to -4} f(x)$ *bestaan nie want hulle is ongelyk*

5.2 Waarom is *f* diskontinu by $x=-2$?

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=3$ maar $f(-2)=2$

$\therefore$ *diskontinu want hulle is ongelyk*

5.3 Watter tipe diskontinuïteit kom voor by $x=-2$?

Verwyderbaar

5.4 Bepaal $g(x)$ indien $g(x)$ 'n **lineêre funksie** is en f differensieerbaar moet wees by $x=2$.

ons benodig $g(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=3$

maar ons benodig ook $\lim\limits_{x\to 2^+} g'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x=2$

dus $g(x)=2x+c$

maar $g(2)=2(2)+c=3$

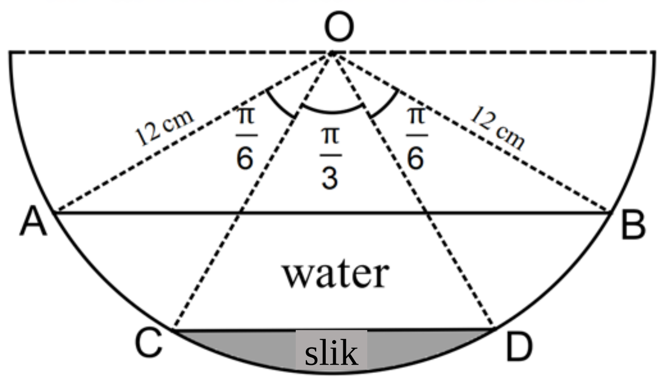
dus $c=-1$

$\therefore g(x)=2x-1$

VRAAG 6

Beskou die diagram hieronder. Dit verteenwoordig die deursnee van 'n halfsirkelvormige geut met O die middelpunt van die halfsirkel. Daar is slik onder in die geut. Die oppervlak van die slik, CD, is parallel aan die oppervlak van die water, AB. Belangrike hoeke, in radiale, word in die diagram getoon. Indien die radius van die geut 12 cm is en die geut 2 m lank is, bereken die volume water in die geut tot die naaste liter.

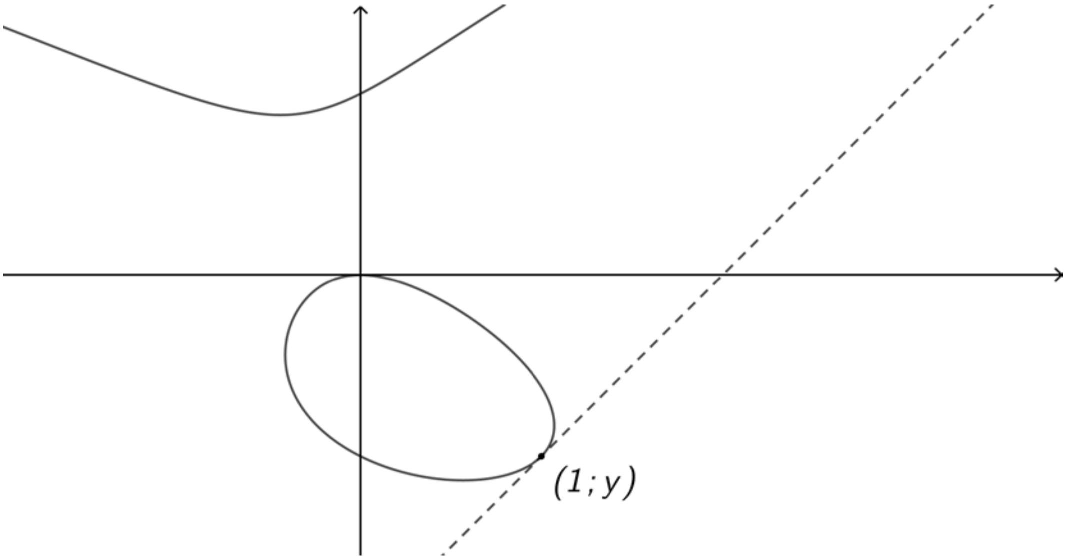
Onthou: 1 cm^3 = 1 ml en 1 liter = 1 000 ml.



$$\begin{aligned}
\textit{Oppervlakte van water} &= \textit{kleinsegment } AB - \textit{kleinsegment } CD \\
\textit{Nou kleinsegment } AB &= \textit{sektor } AOB - \triangle AOB \\
&= \frac{1}{2}12^2\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}12^2\sin\frac{2\pi}{3} \\
&= 48\pi - \frac{72\sqrt{3}}{2} \\
\textit{en kleinsegment } CD &= \textit{sektor } OCD - \triangle OCD \\
&= \frac{1}{2}12^2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}12^2\sin\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{72\pi}{3} - \frac{72\sqrt{3}}{2} \\
\textit{Dus oppervlakte van water} &= 48\pi - \frac{72\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{72\pi}{3} - \frac{72\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 24\pi \text{ cm}^2 \\
\textit{Dus volume} &= 200 \times 24\pi \text{ cm}^3 \\
&= 15079{,}6 \text{ cm}^3 \\
&= 15 \textit{ liter tot die naaste liter}
\end{aligned}$$

VRAAG 7

Hieronder is die grafiek van die implisiet gedefinieerde verwantskap: $y^3 - xy = y + x^2$.



Bepaal die vergelyking van die raaklyn (met 'n stippellyn aangedui) indien dit bekend is dat die *x*-koördinaat van die raakpunt 1 is.

$y^3 - xy = y + x^2$

Wanneer $x = 1, y^3 - y = y + 1$

$\therefore y^3 - 2y - 1 = 0$

$\therefore y = -1$

dus is die raakpunt $(1;-1)$

$\therefore 3y^2 \frac{dy}{dx} - \left(y + x\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy}{dx} + 2x$

$\therefore 3y^2 \frac{dy}{dx} - y - x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} + 2x$

$\therefore \frac{dy}{dx}\left(3y^2 - x - 1\right) = y + 2x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y + 2x}{3y^2 - x - 1}$

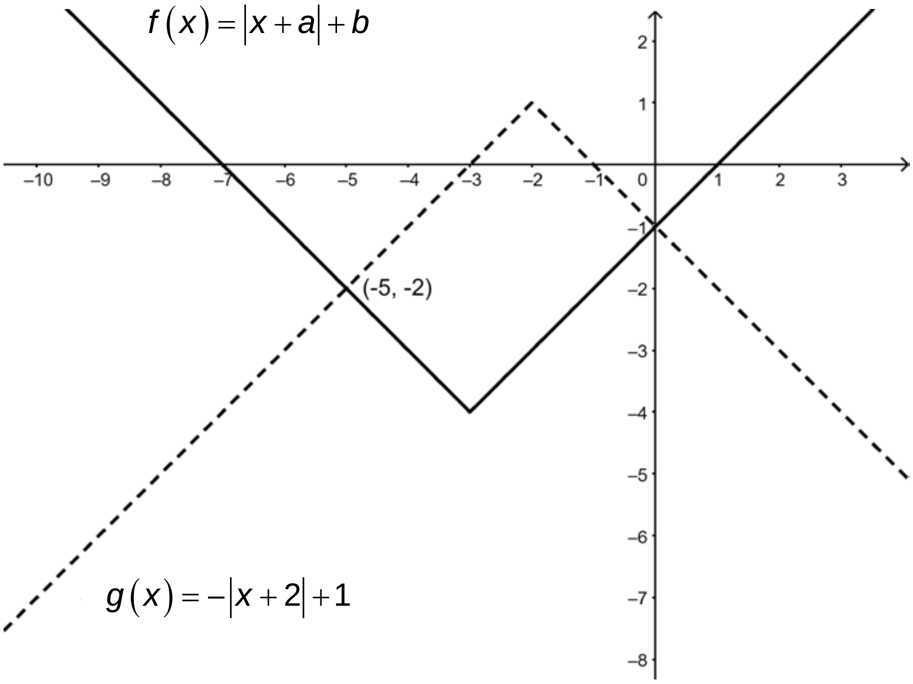
$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1 + 2}{3 - 1 - 1} = 1$

$\therefore y - (-1) = 1(x - 1)$

$\therefore y = x - 2$

VRAAG 8

8.1 Beskou die funksies $f(x) = |x + a| + b$ en $g(x) = -|x + 2| + 1$.



(a) Bepaal die waardes van *a* en *b*.

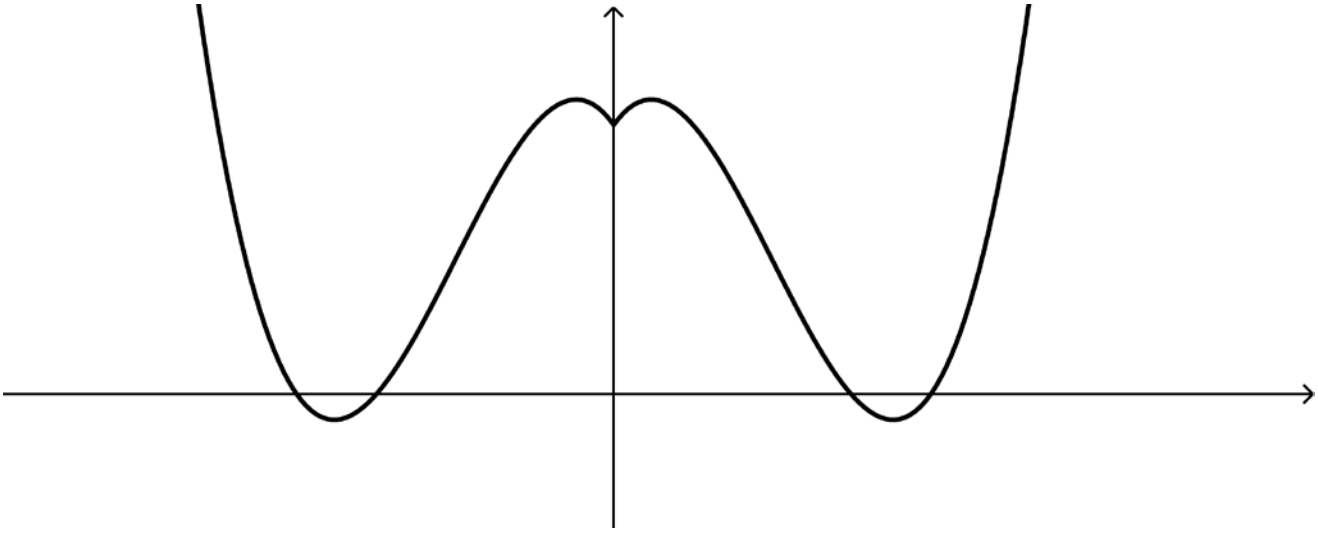
$a = 3$ en $b = -4$

(b) Los vervolgens of andersins op:

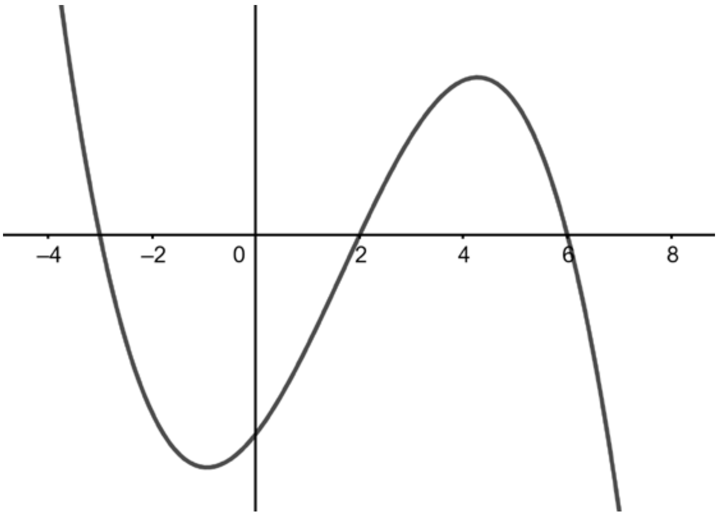
$|x + 3| + |x + 2| \leq 5.$

$$\begin{aligned}
&|x+3| + |x+2| \leq 5 \\
&\therefore |x+2| \leq 5 - |x+3| \\
&\therefore -|x+2| \geq -5 + |x+3| \\
&\therefore -|x+2| + 1 \geq |x+3| - 4 \\
&\therefore -5 \leq x \leq 0
\end{aligned}$$

8.2 Die grafiek van $y = f(x)$ word gegee. Teken op jou eie assestelsel in jou antwoordboek 'n ruwe skets van $y = f(|x|)$.



8.3 Beskou die funksie *f* wat hieronder geteken is.



Gegee: $\int_0^2 f(x)\,dx = -38{,}7$ en $\int_2^6 f(x)\,dx = 74{,}7$ Bepaal:

(a) $\int_0^6 f(x)\,dx = -38{,}7 + 74{,}7 = 36$

(b) $\int_0^6 |f(x)|\,dx = 38{,}7 + 74{,}7 = 113{,}4$

VRAAG 9

Beskou die funksie $f(x) = x\ln(x) - \sqrt{x^2+4},\ x > 0$.

9.1 Indien gegee word dat f kontinu is by elke waarde in sy definisiegebied, regverdig waarom f minstens een wortel op die interval $x \in [1;5]$ het.

$f(1) = -\sqrt{5}$

$f(5) = 2,6$

aangesien $f(1) < 0$ en $f(5) > 0$

en f kontinu is op $[1;5]$

moet f die x-as minstens een keer kruis

op $[1;5]$ dus is daar minstens een wortel op $[1;5]$

9.2 Gebruik Newton-Raphson-iterasie om hierdie wortel te bepaal. Jy moet die volgende doen:

- Gebruik 'n aanvanklike raaiskoot van $x = 1$.
- Toon die iteratiewe formule wat jy gebruik.
- Toon jou eerste twee benaderings.
- Gee jou antwoord tot 5 desimale plekke.

$$f(x) = x\ln(x) - \sqrt{x^2+4}$$

$$\therefore f'(x) = \ln(x) + x\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)$$

$$\therefore f'(x) = \ln(x) + 1 - x\left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \frac{x_n\ln(x_n) - \sqrt{x_n^{\ 2}+4}}{\ln(x_n) + 1 - x_n\left(x_n^{\ 2}+4\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

$x_0 = 1$

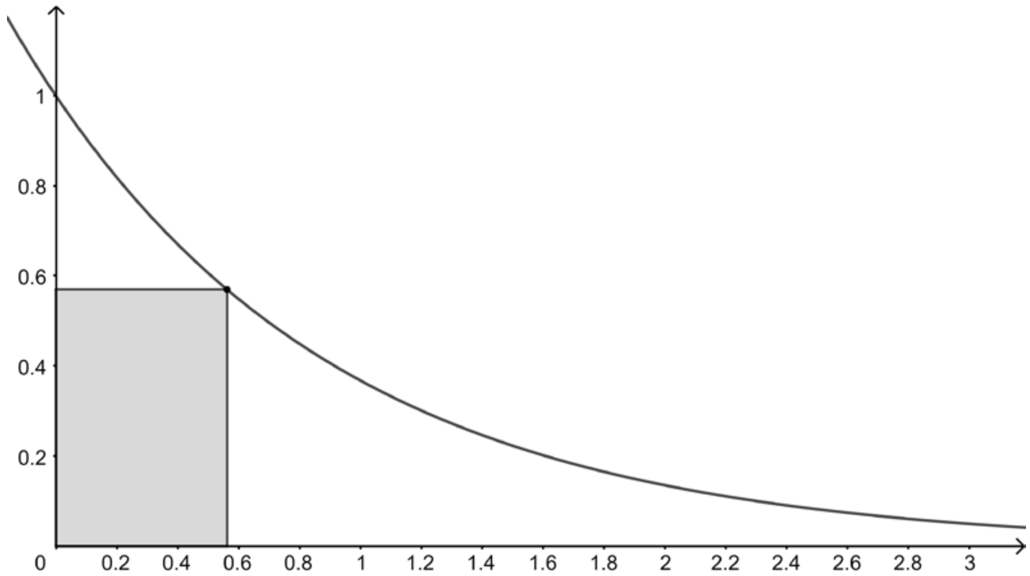
$x_1 = 5,045085...$

$x_2 = 3,423819...$

$x \approx 3,23903$ (tot 5 d.p.)

VRAAG 10

Beskou die diagram hieronder waar 'n reghoek in die eerste kwadrant gevorm word. Die onderste linkerhoek word op die oorsprong geplaas, terwyl die boonste regterhoek op die kromme $y = e^{-x}$ geplaas word. Bereken tot 3 desimale plekke die maksimum oppervlakte van die reghoek wat behaal kan word deur dit op hierdie manier te plaas.



$A = xe^{-x}$

$\therefore \dfrac{dA}{dx} = e^{-x} - xe^{-x} = 0$

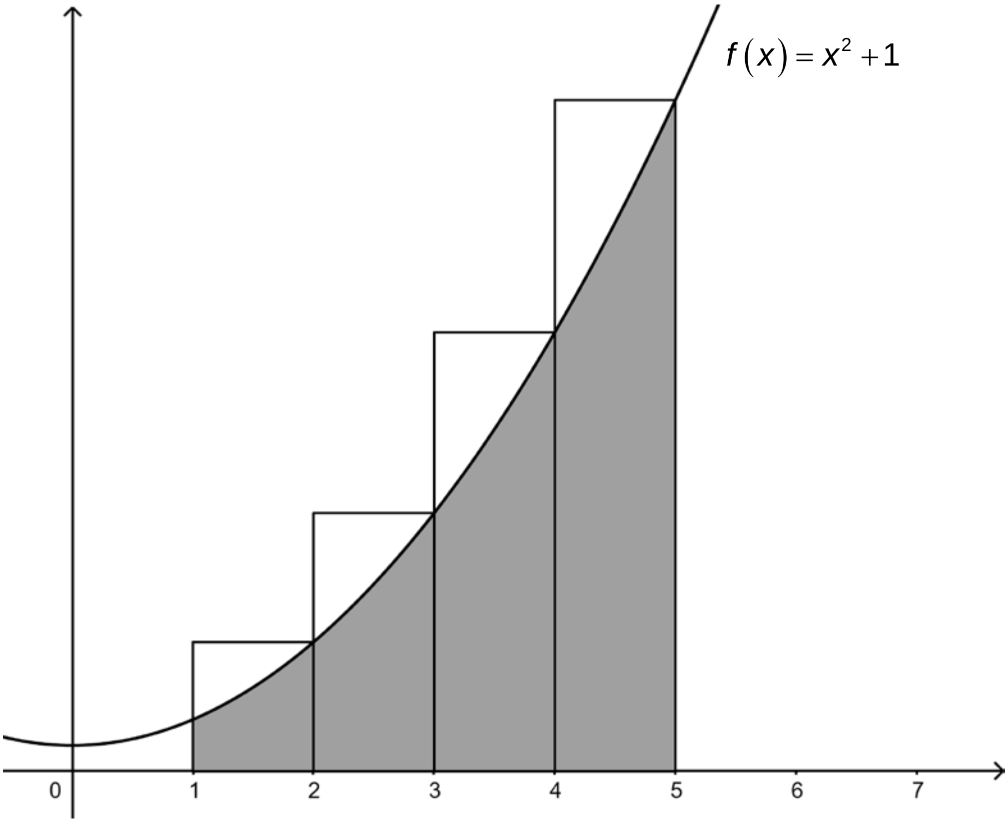
$\therefore e^{-x}\left(1 - x\right) = 0$

$\therefore x = 1$

$\therefore A_{\text{maks}} = e^{-1} = 0{,}368\ eenhede^2$

VRAAG 11

11.1 Robyn gebruik reghoeke om die gearseerde oppervlakte te beraam. Bereken haar foutpersentasie tot een desimale plek.



Robyn se beraming is $(1\times 5)+(1\times 10)+(1\times 17)+(1\times 26) = 58$ *eenhede*^{2}

presiese antwoord $= \int_1^5 x^2 + 1\,dx = \frac{136}{3}$ of $45\frac{1}{3}$ *eenhede*^{2}

foutpersentasie is $\frac{58}{45\frac{1}{3}} \times 100 = 27{,}9\%$

11.2 (a) Ontbind $\dfrac{3x^2+11x-5}{x^3+3x^2-4}$ in parsieelbreuke.

$$\begin{aligned}\frac{3x^2+11x-5}{x^3+3x^2-4} &= \frac{3x^2+11x-5}{(x-1)(x^2+4x+4)}\\ &= \frac{3x^2+11x-5}{(x-1)(x+2)^2}\\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}\end{aligned}$$

$A=1$ volgens oordekkingsmetode

$$\text{dus } 1(x^2+4x+4)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)=3x^2+11x-5$$

$$\begin{aligned}x^2+4x+4+Bx^2+Bx-2B+Cx-C &= 3x^2+11x-5\\ &= (1+B)x^2+(4+B+C)x+(4-2B-C)\end{aligned}$$

dus $B=2$ en $C=5$

$$=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}+\frac{5}{(x+2)^2}$$

(b) Bepaal vervolgens, of andersins, $\displaystyle\int\frac{3x^2+11x-5}{x^3+3x^2-4}\,dx$.

$$\begin{aligned}&\int\frac{3x^2+11x-5}{x^3+3x^2-4}\,dx\\ &=\int\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}+\frac{5}{(x+2)^2}\,dx\\ &=\ln|x-1|+2\ln|x+2|-\frac{5}{(x+2)}+c\end{aligned}$$

11.3 Bepaal $\int xe^{2x}\,dx$.

laat $f(x)=x$ dan $f'(x)=1$

laat $g'(x)=e^{2x}$ dan $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

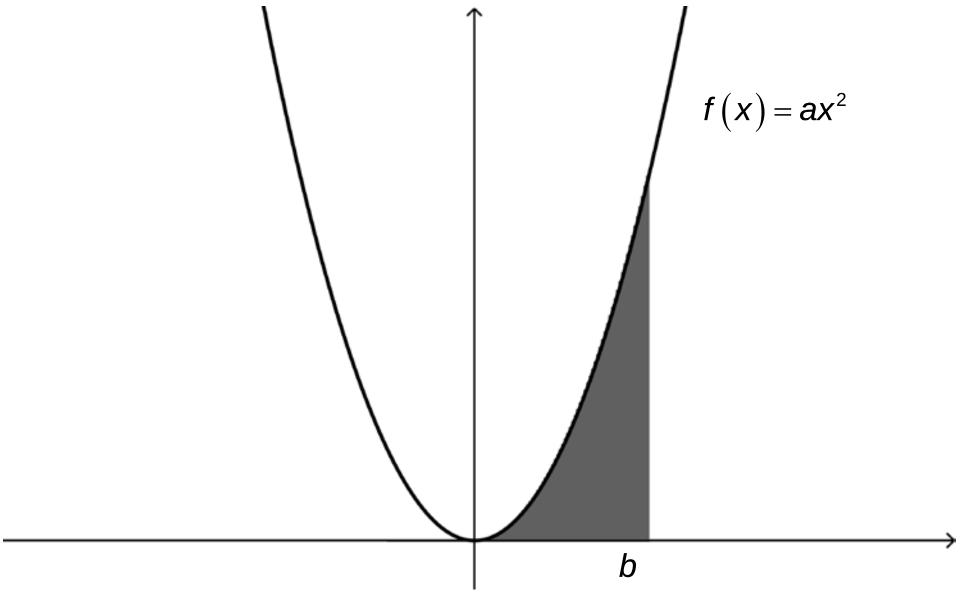
$$\begin{aligned}\text{dan }\int xe^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx\\ &= \frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+c\end{aligned}$$

11.4 Bepaal $\int \text{cosec}^2 x\cot^2 x\,dx$.

$$=-\frac{\cot^3 x}{3}+c$$

VRAAG 12

Beskou die diagram hieronder.



Die oppervlakte begrens deur die funksie *f*, die *x*-as, die lyne $x = 0$ en $x = b$ is $\frac{160}{3}$ *eenhede*^{2}. Wanneer hierdie oppervlakte om die *x*-as geroteer word, is die resulterende volume $1\,280\pi$ *eenhede*^{3}. Bepaal die waardes van ***a*** en ***b***.

$$\int_0^b ax^2\, dx = \frac{160}{3}$$

$$\therefore \left[\frac{ax^3}{3}\right]_0^b = \frac{160}{3}$$

$$\therefore \frac{ab^3}{3} - 0 = \frac{160}{3}$$

$$\therefore ab^3 = 160 \quad (1)$$

$$\pi\int_0^b \left(ax^2\right)^2\, dx = 1280\pi$$

$$\therefore \left[\frac{a^2x^5}{5}\right]_0^b = 1280$$

$$\therefore \frac{a^2b^5}{5} = 1280$$

$$\therefore a^2b^5 = 6400 \quad (2)$$

kwadrering van albei kante van vergelyking (1) *gee* $a^2b^6 = 25600\ (3)$

deling van vergelyking (3) *deur vergelyking* (2) *gee* $b = 4$

vervanging van hierdie waarde in (1) *gee* $a = \frac{5}{2}$

Totaal: 200 punte