



**Plak asseblief die
strepieskode-etiket hier**

**PUNTE-
TOTAAL**

--

GRAAD 12 EKSAMEN
NOVEMBER 2021

**GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA**

EKSAMENNOMMER

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Tyd: 2 uur

200 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 32 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
2. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
3. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
4. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
5. Rond jou antwoorde tot 2 desimale syfers af, tensy anders aangedui.
6. DRIE blanko bladsye (bladsy 30 tot 32) word aan die einde van die vraestel ingesluit. Gebruik hierdie bladsye indien jy te min spasie vir 'n vraag het. Toon die vraagnommer van jou antwoord duidelik indien jy hierdie ekstra spasie gebruik.

VRAAG 1

1.1 Los op vir $x \in \mathbb{R}$:

- (a) $2e^x - 7 + 6e^{-x} = 0$ en druk jou antwoorde in eksakte vorm uit deur logs te gebruik.

(8)

- (b) $|2x + 3| = 5x - 2$

(6)

$$(c) \quad \frac{(-x^2 - 5)(x^2 - 16)}{|x + 3|(x + 2)} \geq 0$$

1.2 Beskou die funksie $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 29x - 30$

- (a) Indien gegee word dat $x = 2 - i$ 'n wortel van die vergelyking $f(x) = 0$ is, skryf $f(x)$ as 'n produk van twee drieterme.

(4)

- (b) Los $f(x) = 0$ vervolgens op in \mathbb{C} .

(2)

1.3 Kwande het 'n nuwe tipe komplekse getal genaamd 'n **Kwande-getal** gedefinieer. Dit het die eienskap dat $\text{Im}(z) = 2\text{Re}(z)$.

Met ander woorde, 'n **Kwande-getal** z is van die vorm: $z = a + 2ai$

Bewys dat vir alle **Kwande-getalle** $\frac{z}{z^*} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.

VRAAG 2

Die getal mense, n , in 'n skool met populasie P wat 'n gerug gehoor het, kan deur die volgende funksie gemodelleer word:

$$n = P - Pe^{-0.14t}$$

waar t die tyd (in dae) is wat verloop het sedert die gerug begin het.

(a) Maak t die onderwerp van die formule.

(4)

(b) Bepaal vervolgens hoeveel dae, tot die naaste dag, dit sal neem vir minstens 750 mense in 'n skool van 1200 om die gerug te hoor.

(2)
[6]

VRAAG 3

Toon uit eerste beginsels die afgeleide van $f(x) = \frac{1}{2+3x}$ is $\frac{-3}{(2+3x)^2}$.

[8]

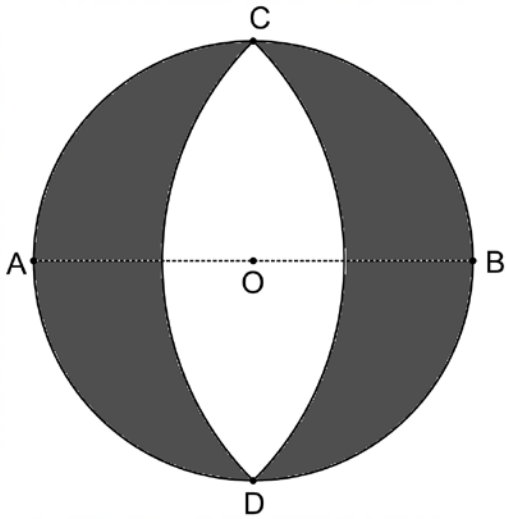
VRAAG 4

Bewys dat $3^{2n+4} - 2^{2n}$ 'n veelvoud van 5 is vir alle $n \in \mathbb{N}$.

VRAAG 5

In die diagram hieronder het die sirkel met middelpunt O en middellyn AB 'n radius van 4 cm .

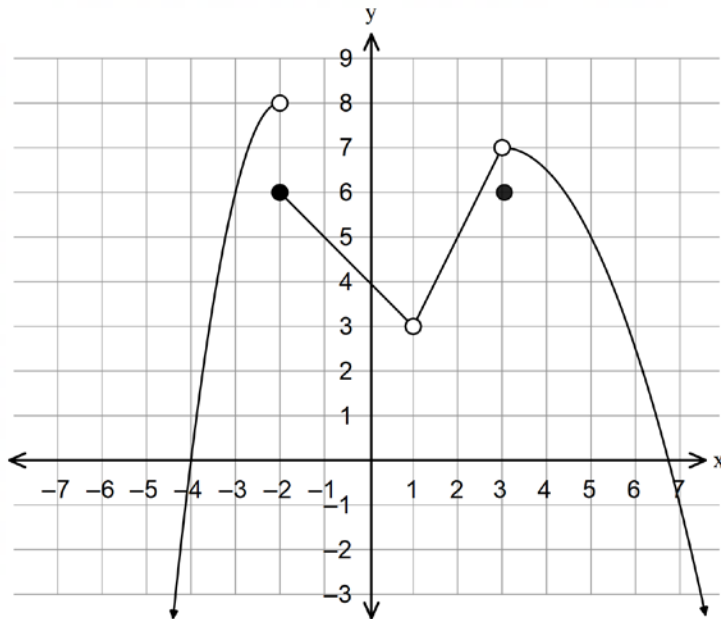
Sirkelboë word deur C en D getrek met A en B as middelpunte.



Bepaal die gearseerde oppervlakte.

VRAAG 6

6.1 Beskou die grafiek van die funksie f wat hieronder getoon word.



Beantwoord die volgende vrae en gee noukeurig aandag aan die presisie van wiskundige notasie wat jy gebruik:

(a) Gebruik wiskundige notasie en regverdig waarom f diskontinu is by $x = -2$.

(2)

(b) Gebruik wiskundige notasie en regverdig waarom f diskontinu is by $x = 1$.

(2)

(c) Gebruik wiskundige notasie en regverdig waarom f diskontinu is by $x = 3$.

(2)

(d) Wat is die aard van die diskontinuiteit by $x = -2$?

(1)

(e) Wat is die aard van die diskontinuiteit by $x = 3$?

(1)

6.2 Verduidelik waarom $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ nie bestaan nie.

(4)

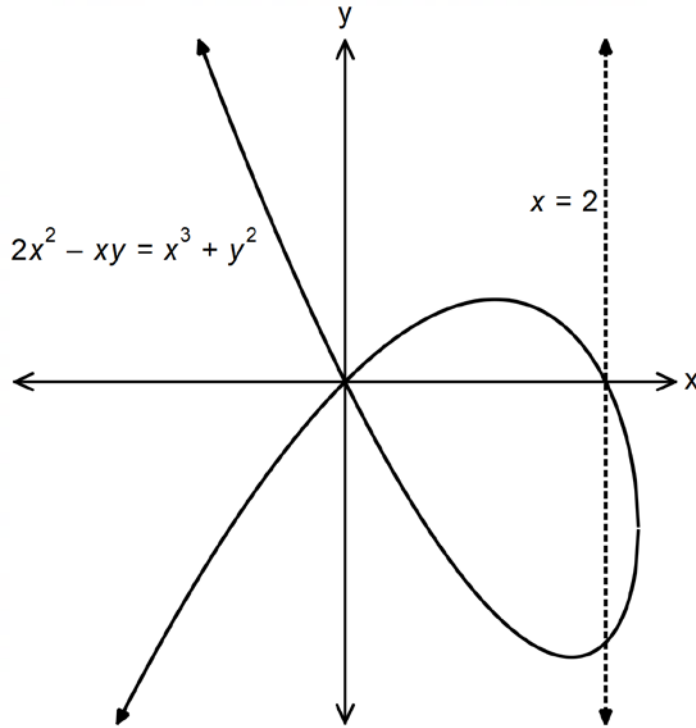
6.3 Beskou die funksie g wat hieronder gedefinieer word.

$$g(x) = \begin{cases} -0,5x^2 + 2x + 3 & x \leq 2 \\ px^2 + qx + 13 & x > 2 \end{cases}$$

Gebruik toepaslike wiskundige notasie en bepaal die rasionale waardes van p en q indien g differensieerbaar is by $x = 2$.

VRAAG 7

Die kromme $2x^2 - xy = x^3 + y^2$ het twee raaklyne waar die x-koördinaat van die raakpunt 2 is. Bepaal die vergelyking van die raaklyn met 'n positiewe gradiënt.



VRAAG 8

8.1 Bepaal vir elkeen van die gegewe funksies heelgetalwaarde(s) van a indien:

(a) $f(x) = \frac{ax^2 + 2x + 3}{-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4}$ 'n asimptoot $y = 2$ het

(2)

(b) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4x + a}$ asimptote $x = 1$ en $x = 3$ het

(2)

(c) $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x + a}$ 'n asimptoot $y = 2x - 4$ het

(6)

(d) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^a + 3x + 4}$ 'n asimptoot $y = 0$ het

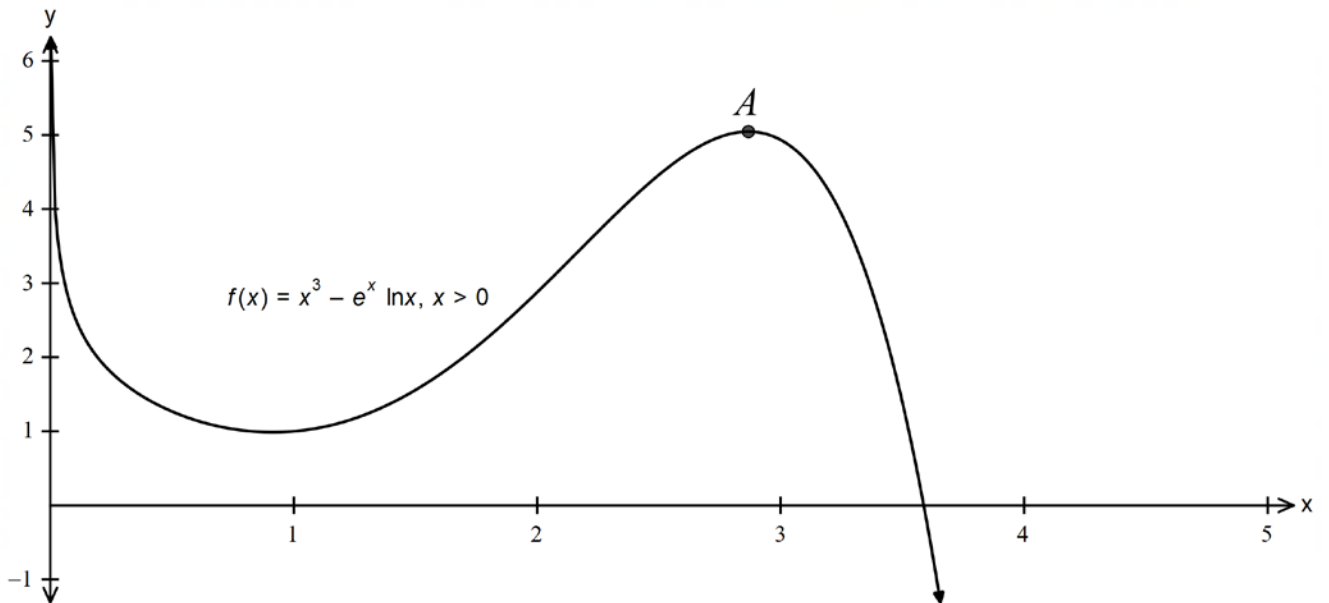
(2)

8.2 Bepaal die x -koördinaat(e) van die stasionêre punt(e) van:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7x + 1}{2x + 3}$$

VRAAG 9

'n Gedeelte van die funksie $f(x) = x^3 - e^x \ln x$, $x > 0$ word getoon.



9.1 Toon dat die vergelyking hieronder die een sal wees wat jy sal moet oplos om die x-koördinaat van die lokale maksimum by punt A te bepaal.

$$3x^2 - e^x (\ln x + x^{-1}) = 0$$

9.2 Gebruik Newton-Raphson-iterasie om die x -koördinaat van A tot vyf desimale plekke te bepaal.

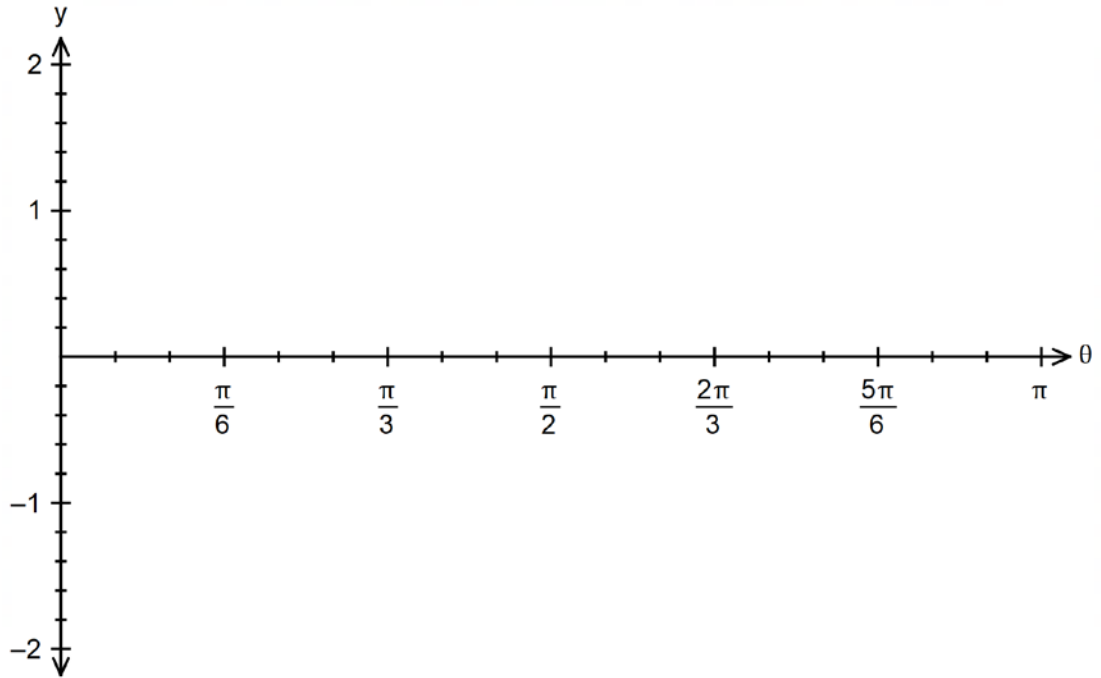
- Toon die iterasieformule wat jy gebruik.
- Gebruik $x_0 = 3$ as die eerste benadering.
- Toon die waarde vir x_1 tot vyf desimale plekke.

(8)
[14]

VRAAG 10

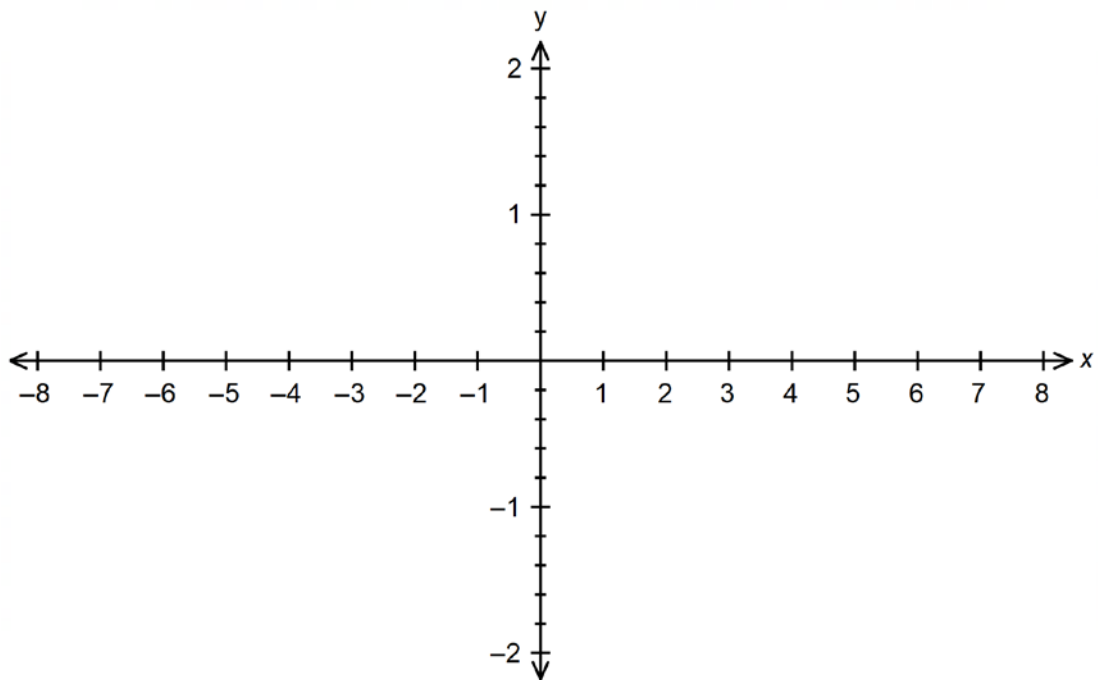
10.1 Skets die volgende funksies en dui die x-afsnitte aan:

(a) $y = |\sin 2\theta|$ vir $\theta \in [0; \pi]$



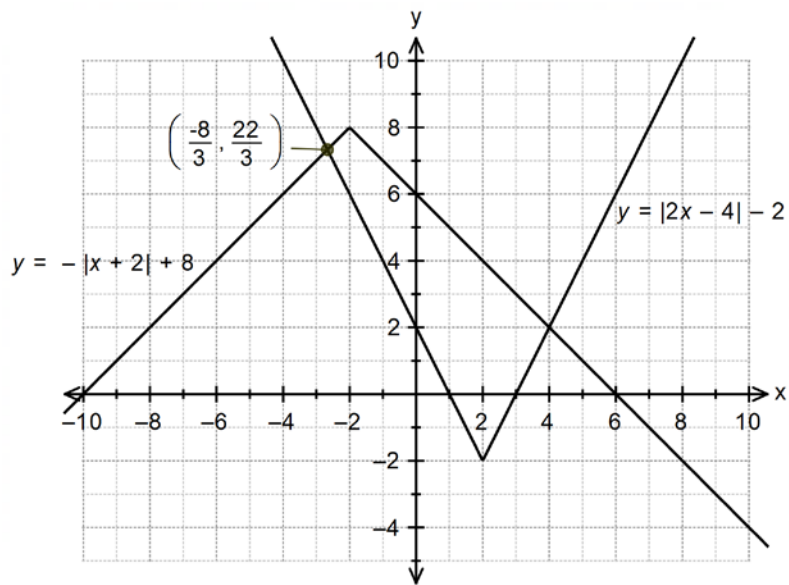
(4)

(b) $y = \ln|x|$



(4)

10.2 Gebruik die grafieke op die geskaalde asse hieronder, of andersins, om die gegewe ongelykhede op te los:



(a) $|2x - 4| \leq 8$

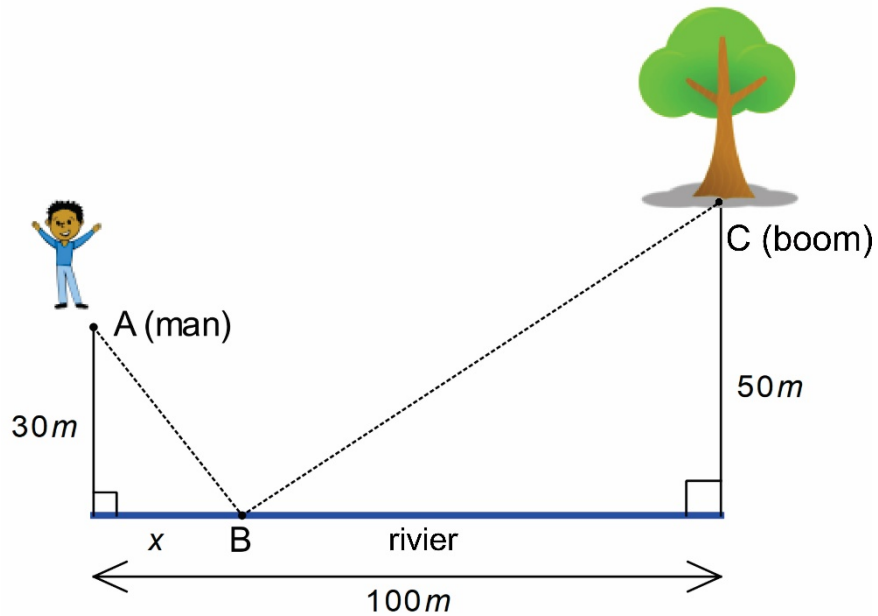
(4)

(b) $2|x - 2| + |x + 2| \leq 10$

(6)
[18]

VRAAG 11

11.1 'n Man staan 30 m weg van 'n reguit rivier. 100 m stroomaf is daar 'n boom wat 50 m van die rivieroewer af is. Hy wil na die rivier toe stap om te drink en dan na die boom om in die skaduwee te rus. Hy stap in reguitlyne soos uitgebeeld deur die stippellyne in die diagram.



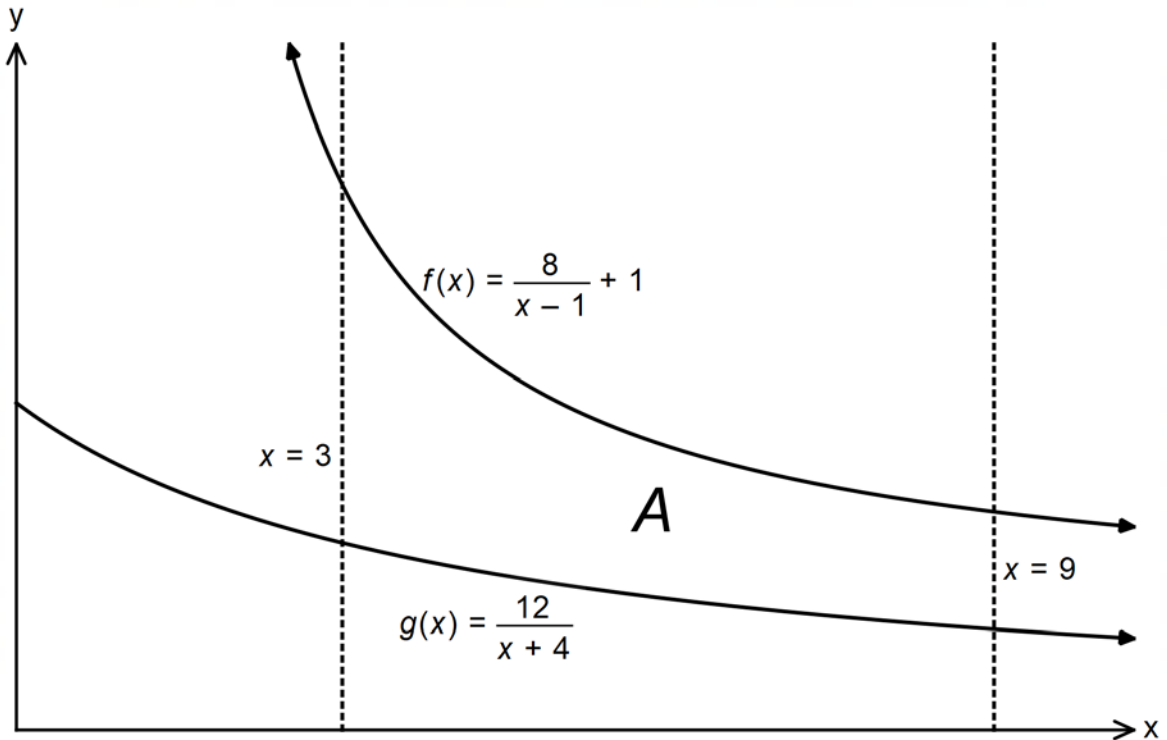
(a) Toon dat die afstand wat hy sal stap, gegee word deur die uitdrukking:

$$d = \sqrt{x^2 + 900} + \sqrt{x^2 - 200x + 12\,500}$$

(4)

- (b) Bepaal vervolgens die waarde van x wat die afstand d sal minimaliseer.

11.2 Bepaal die oppervlakte gemerk A hieronder. Dit word aan die bokant begrens deur die kromme $f(x) = \frac{8}{x-1} + 1$, aan die onderkant deur die kromme $g(x) = \frac{12}{x+4}$, aan die linkerkant deur die lyn $x = 3$ en aan die regterkant deur die lyn $x = 9$. Jy moet die uitdrukking toon wat die integrale behels wat jy gebruik om jou antwoord te bereken.



(6)
[18]

VRAAG 12

12.1 Bepaal die volgende:

(a) $\int \sin 5x \cos 4x \, dx$

(6)

(b) $\int x e^x \, dx$

(4)

(c) $\int e^{\tan 2x} \sec^2 2x \, dx$

(d) $\int \frac{x^3 - 3}{x^2 - 1} dx$

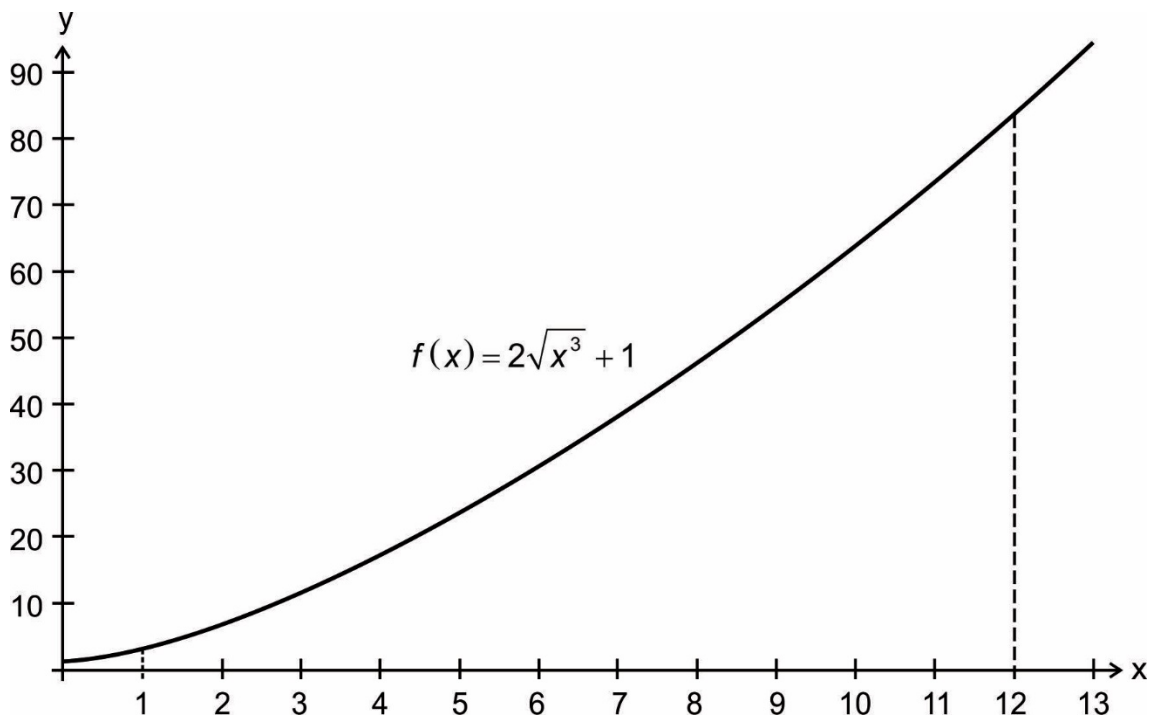
12.2 Die booglengte van 'n funksie $f(x)$ van $x = a$ na $x = b$ word gegee deur die formule:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx$$

Die funksie $f(x) = 2\sqrt{x^3} + 1$ word gegee.

Gebruik hierdie formule om die booglengte van $f(x)$ tussen $x = 1$ en $x = 12$ te bepaal soos hieronder geïllustreer.

Jy moet die integraal toon wat jy gebruik om jou antwoord te bereken.



(7)
[32]

Totaal: 200 punte

BLAAI ASSEBLIEF OM

BYKOMENDE SPASIE OM VRAE TE BEANTWOORD. ONTHOU OM DUIDELIK BY DIE VRAAG AAN TE DUI DAT JY DIE BYKOMENDE SPASIE GEBRUIK HET OM TE VERSEKER DAT AL DIE ANTWOORDE NAGESIEN WORD.

