

**GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA**

Tyd: 2 uur

200 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 11 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
 2. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
 3. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
 4. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
 5. Rond jou antwoorde af tot 2 desimale syfers, tensy anders aangedui.
-

VRAAG 1

1.1 Los op vir $x \in \mathbb{R}$ sonder om 'n sakrekenaar te gebruik en toon alle berekeninge:

(a) $2|e^x - 5| + 3 = 11$ (7)

(b) $\ln x = 3$ (2)

1.2 Bepaal a en b indien $\frac{a+bi}{5-i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. (10)

1.3 Bepaal in standaardvorm 'n vierdegraadsvergelyking met rasionale koëffisiënte waar twee van die wortels gelyk is aan $2+i$ en $1-\sqrt{3}$. (8)
[27]

VRAAG 2

Vir 'n bepaalde jaarlikse rentekoers word die opbrengs verbeter deur die rente meer gereeld saam te stel. Daar is egter 'n perk. Indien rente voortdurend saamgestel word, geld die volgende formule:

$$A = Pe^{rt}$$

waar:

- P die hoofsom is wat belê word
- A die opgehoopte bedrag is
- r die jaarlike rentekoers is wat as 'n persentasie uitgedruk word
- t die tyd in jaar is

2.1 Maak t eers die onderwerp van die formule en bepaal dan hoe lank dit die geld sal neem om in waarde te verdriedubbel indien die rentekoers 10% per jaar is. Druk jou antwoord tot die naaste jaar uit. (6)

2.2 Maak r eers die onderwerp van die formule en bepaal dan die jaarlikse rentekoers (uitgedruk as 'n persentasie tot 2 desimale plekke) wat R500 binne 3 jaar tot 'n totaal van R900 sal vermeerder. (4)
[10]

VRAAG 3

Gebruik volledige induksie om te bewys dat $n^3 + 2n$ deelbaar is deur 3 vir $n \in \mathbb{N}$.

[12]**VRAAG 4**

Bepaal $f'(x)$ uit eerste beginsels indien $f(x) = \sqrt{1-x}$.

[10]**VRAAG 5**

5.1 Beskou die funksie $f(x) = \frac{2x^2 + 2x - 3}{x^2 - 5x - 6}$.

(a) Gee die vergelykings en aard van alle asimptote. (6)

(b) Bewys dat die funksie streng dalend is. (11)

5.2 Gee die vergelyking van 'n rasionale funksie wat:

- 'n skuins asimptoot van $y = 2x + 1$ het
- 'n vertikale asimptoot van $x = -2$ het
- geen x-afsnitte het nie

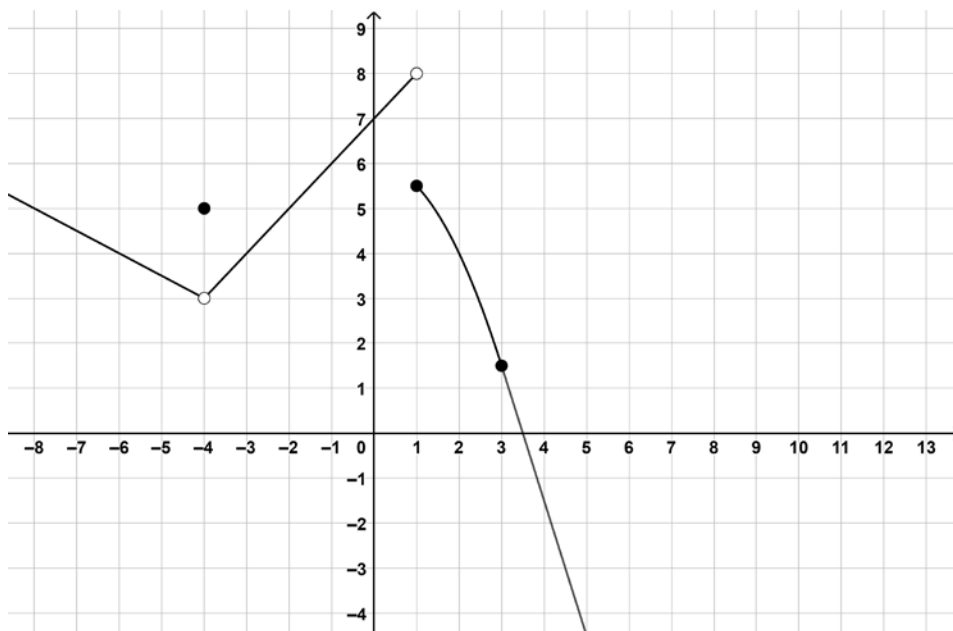
(10)
[27]

VRAAG 6

Beskou die funksie f wat soos volg gedefinieer word:

$$f(x) = \begin{cases} -0,5x + 1 & x < -4 \\ 5 & x = -4 \\ x + 7 & -4 < x < 1 \\ -0,5x^2 + 6 & 1 \leq x \leq 3 \\ ax + b & x \geq 3 \end{cases}$$

f word op die grafiek hieronder uitgebeeld:

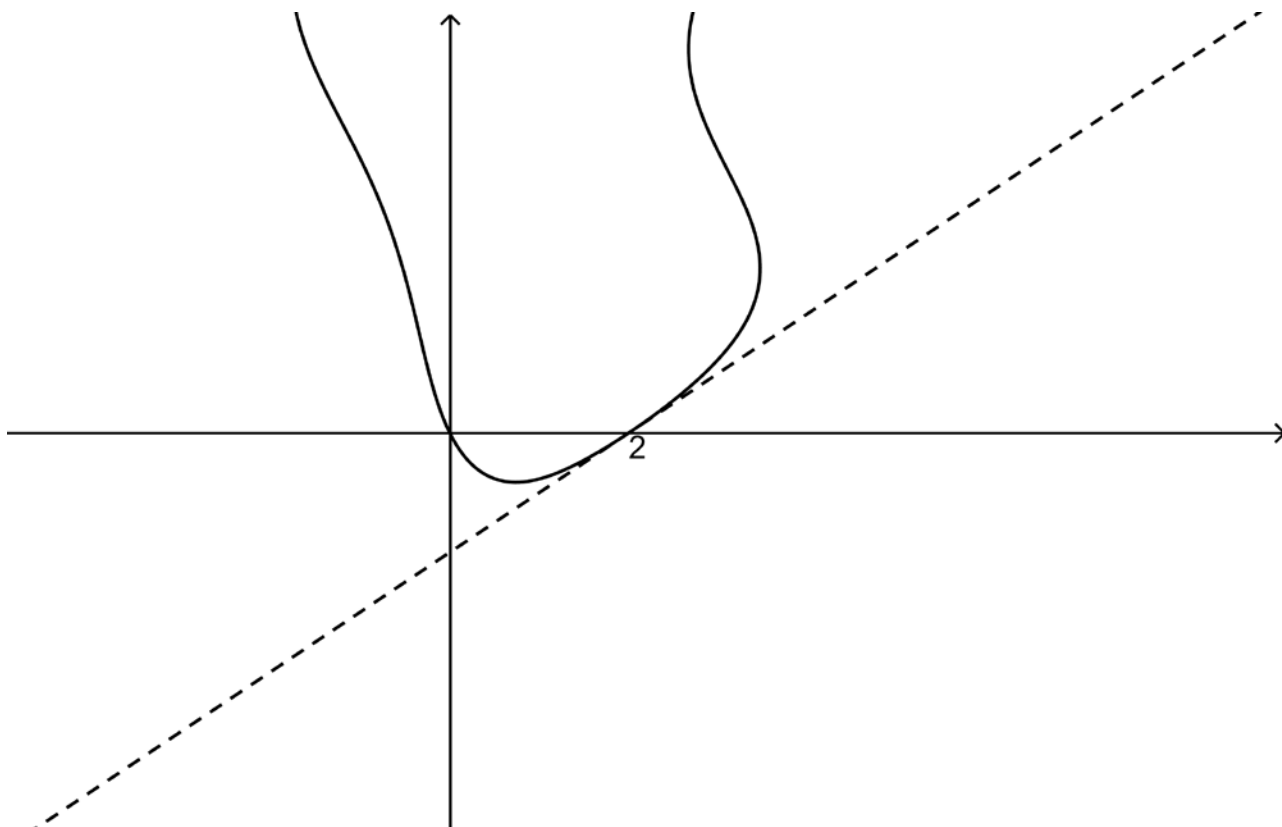


- 6.1 Identifiseer deur middel van hul x -koördinate enige diskontinuiteitspunte. Jy moet ook die diskontinuiteit klassifiseer en jou klassifikasies wiskundig regverdig. Gee noukeurig aandag aan notasie. (6)
- 6.2 Bepaal a en b indien f differensieerbaar is by $x = 3$. (8)
- [14]**

VRAAG 7

'n Gedeelte van die implisiet gedefinieerde kromme $x^2 - x \sin y = y + 2x$ word hieronder getoon.

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme by die punt $(2; 0)$.



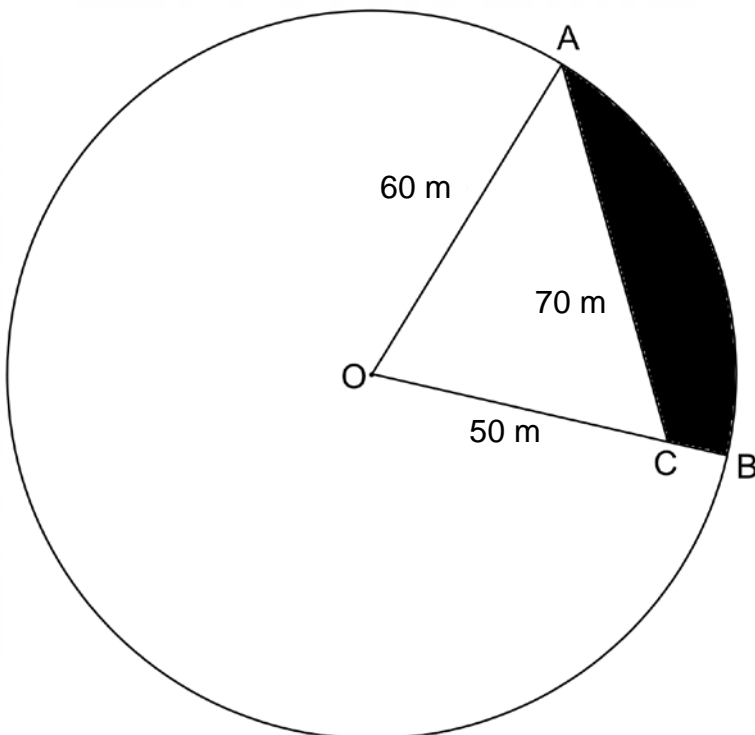
[10]

VRAAG 8



[Bron: <<https://www.northwesthydro.com.au/blog/solar-pumping-for-centre-pivot-irrigation/>>]

Die skets hieronder is dié van 'n sirkelvormige land met 'n sentralespilpunt-besproeiingstelsel daarop. O is die middelpunt en OCB is 'n reguitlyn. OA is 60 m en OC is 50 m. AC is 70 m.



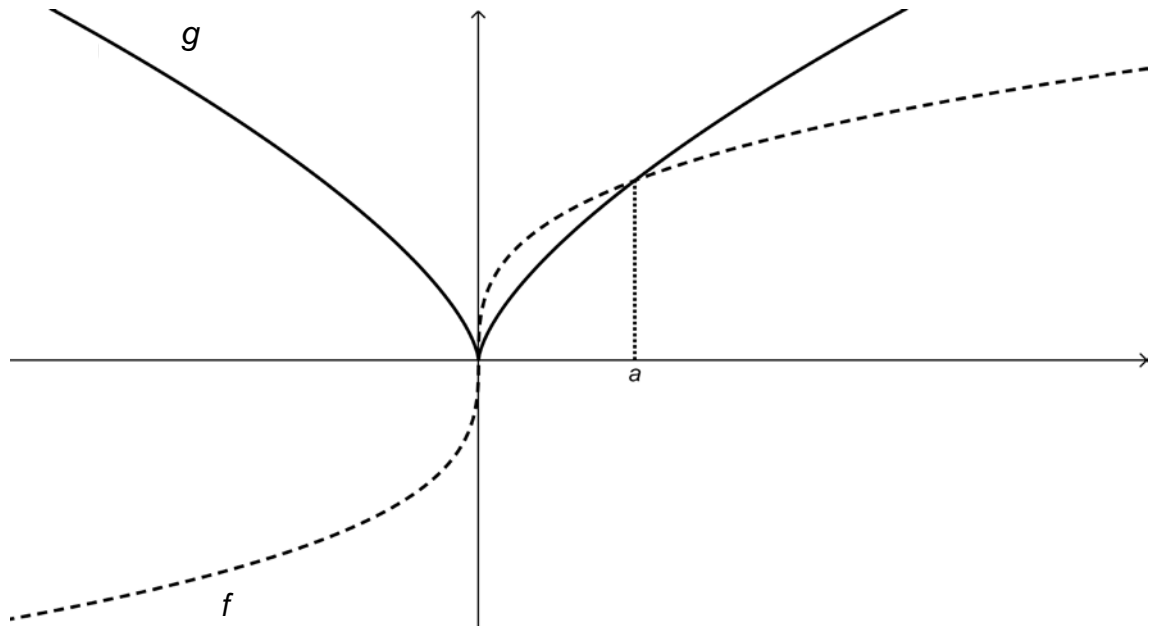
'n Lugfoto van die land het getoon dat die gearseerde oppervlakte vervuil is van onkruid. Watter persentasie van die land is vervuil?

[12]

VRAAG 9

9.1 Beskou die twee funksies hieronder:

f is 'n **oneve** funksie aangesien $f(-x) = -f(x)$, terwyl g 'n **ewe** funksie is aangesien $g(-x) = g(x)$. Om jou te help om hulle te onderskei, is f met 'n stippellyn en g met 'n soliede lyn geteken. f en g sny by $x = a$.



Indien verder gegee word dat $\int_0^a f(x) dx = 0,75$ en $\int_0^a g(x) dx = 0,6$, bepaal die volgende:

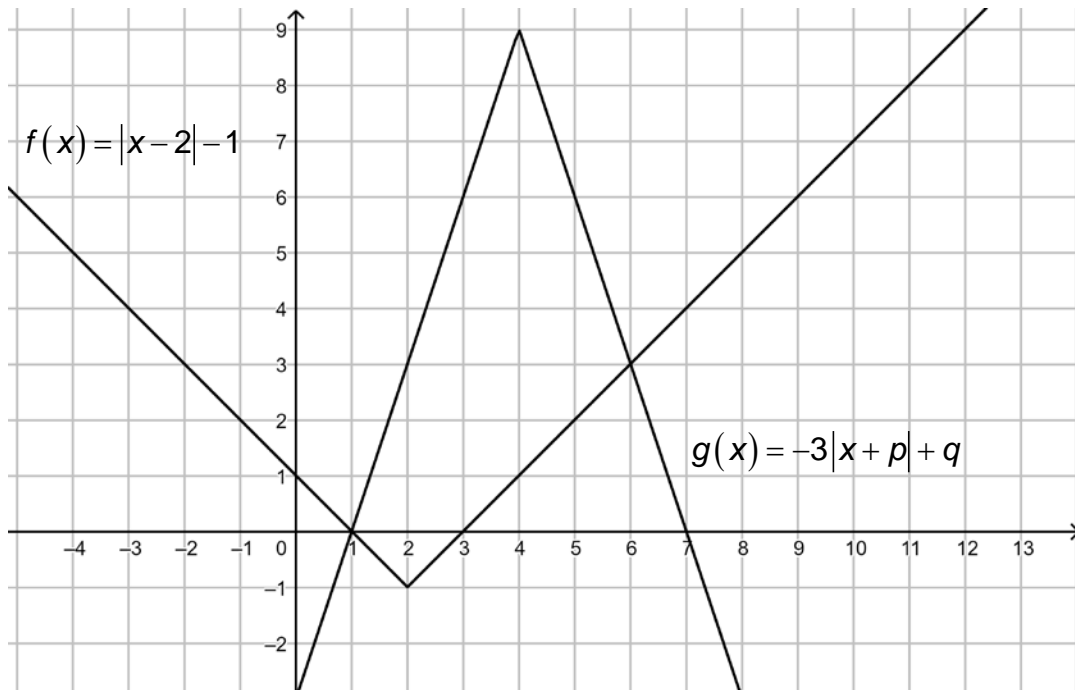
(a) $\int_0^a f(x) - g(x) dx$ (2)

(b) $\int_{-a}^0 f(x) + g(x) dx$ (3)

(c) $\int_{-a}^a 2f(x) + 3g(x) dx$ (4)

(d) $\int_{-a}^a f(|x|) dx$ (3)

9.2 Beskou die funksies $f(x) = |x - 2| - 1$ en $g(x) = -3|x + p| + q$ wat hieronder geteken is:

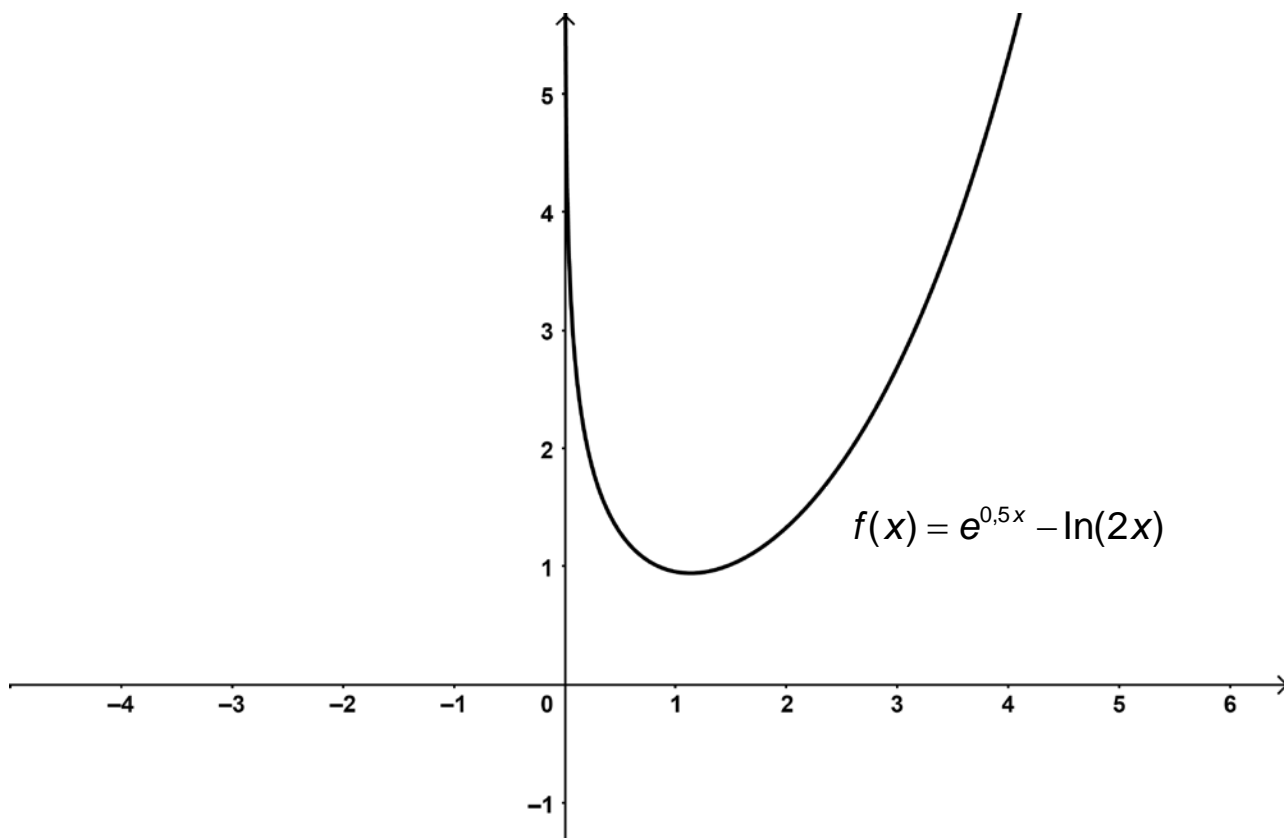


- (a) Bepaal die waardes van p en q . (4)
- (b) Gebruik die grafieke, of andersins, en los op: $|x - 2| + 3|x - 4| > 10$. (6)
- (c) Bepaal $\int_1^7 g(x) dx$. (4)

[26]

VRAAG 10

Gebruik Newton-Raphson-iterasie om die draaipunt van die gegewe funksie te bepaal.



Jy moet die volgende doen:

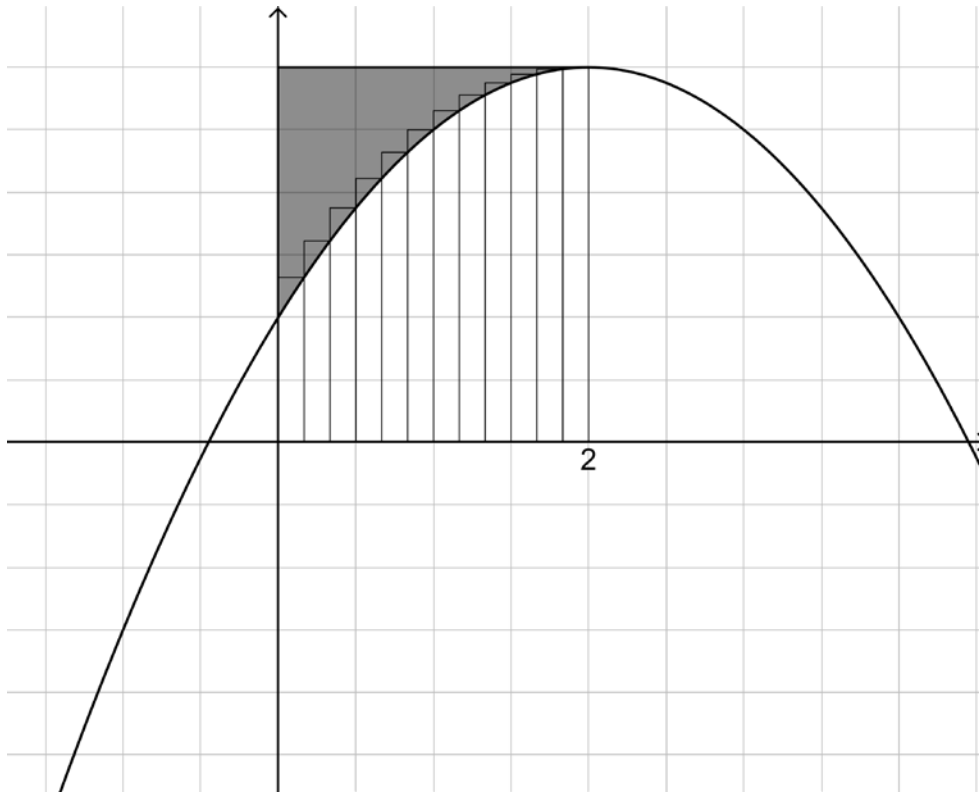
- Toon die iteratiewe formule wat jy gebruik.
- Gebruik 'n aanvanklike benadering van $x = 2$.
- Toon jou eerste benadering tot 5 desimale plekke.

[12]

VRAAG 11

11.1 Wanneer die oppervlakte wat deur die kromme f , die x -as en die lyne $x = 0$ en $x = 2$ begrens word in n reghoeke verdeel word, word die oppervlakte gegee deur:

$$A = -\frac{8}{3} - \frac{4}{3n^2} + 12 + \frac{4}{n}$$



Indien verder gegee word dat $f(2) = 6$, bepaal die gearseerde oppervlakte korrek tot 2 desimale plekke.

(6)

11.2 Bepaal:

(a) $\int x(3x^2 + 7)^3 dx$

(6)

(b) $\int e^{2x} x dx$

(8)

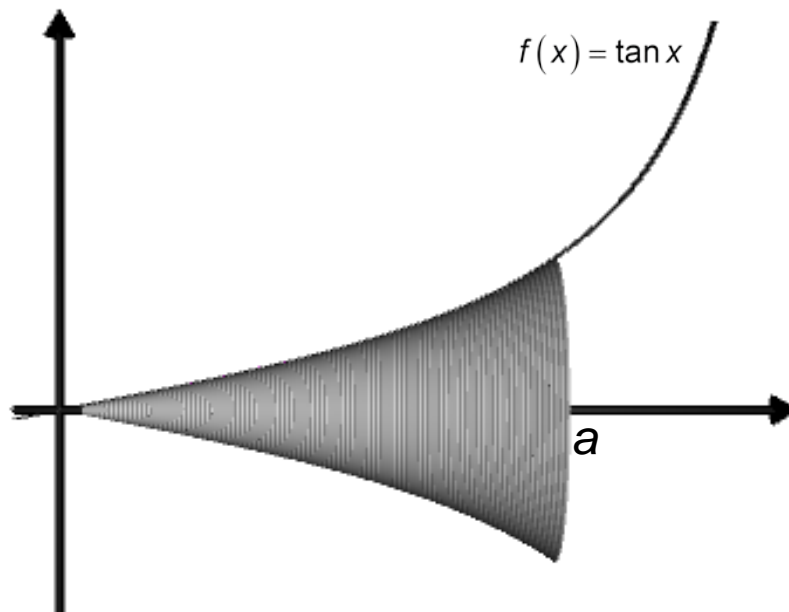
(c) $\int \frac{3x-5}{x^2-2x-3} dx$

(10)

[30]

VRAAG 12

Die oppervlakte wat deur die kromme $f(x) = \tan x$, die x -as, die lyn $x = 0$ en die lyn $x = a$ begrens word, word om die x -as geroteer vir $a < \frac{\pi}{2}$.



Gee 'n uitdrukking vir die volume in terme van a .

[10]

Totaal: 200 punte