

**GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA**

Tyd: 2 uur

200 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG DEUR

1. Hierdie vraestel bestaan uit 9 bladsye en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.
 2. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word, tensy anders aangedui.
 3. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.
 4. Diagramme is nie op skaal geteken nie.
 5. Rond jou antwoorde af tot twee desimale syfers, tensy anders aangedui.
-

VRAAG 1

1.1 Los op vir $x \in \mathbb{R}$ sonder om 'n sakrekenaar te gebruik en toon alle berekeninge:

(a) $|x^2 + x| = -2x - 2$ (8)

(b) $\ln x^3 + 2\ln x^2 = 7$ (6)

1.2 Die vergelyking vir radioaktiewe verval van 'n radioaktiewe element is:

$$y = y_0 e^{-kt}, \quad k > 0$$

waar y_0 die aanvanklike hoeveelheid, y die hoeveelheid na tyd t (in jaar) en k 'n konstante is.

Die halveertyd van 'n element is die tyd wat dit neem vir die helfte van die hoeveelheid om te verval.

(a) Maak k die onderwerp van die formule. (4)

(b) Bepaal die waarde van k vir Koolstof-14 indien die halveertyd van Koolstof-14, 5 700 jaar is. Gee die antwoord korrek tot 6 desimale plek. (2)

(c) Hoe oud is 'n monster waarin 10% van die Koolstof-14-kerne wat oorspronklik aanwesig was, verval het? Met ander woorde, 90% van die oorspronklike hoeveelheid bly oor. (4)

[24]

VRAAG 2

2.1 Bepaal, in standaardvorm ($ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$) met a, b, c en d reëel, 'n derdegraadsvergelyking wat wortels -3 en $3 + 2i$ het. (8)

2.2 Verduidelik waarom elke derdegraadsvergelyking met reële koëffisiënte minstens een reële wortel moet hê. (4)

2.3 Thabo oefen sy deling van komplekse getalle van die vorm $a + bi$ waar $a, b \in \mathbb{R}$.

Hy merk op dat $\frac{3 + 2i}{-2 + 3i} = -i$ $\frac{5 - 7i}{7 + 5i} = -i$ en $\frac{4 + 5i}{-5 + 4i} = -i$.

Bewys dat $\frac{a + bi}{-b + ai} = -i$ vir alle $a, b \in \mathbb{R}$. (8)

[20]

VRAAG 3

Gebruik Wiskundige Induksie om te bewys dat $2^{3n} - 3^n$ deelbaar is deur 5 vir $n \in \mathbb{N}$.

[14]

VRAAG 4

4.1 Beskou die funksie $f(x) = e^{|x|}$.

(a) Teken 'n sketsgrafiek van f en toon minstens twee punte op die grafiek. (8)

(b) Skryf die x -koördinaat neer van 'n punt waarby f nie differensieerbaar is nie. (2)

4.2 Beskou die funksie $f(x)$, waar a en b rasionaal is.

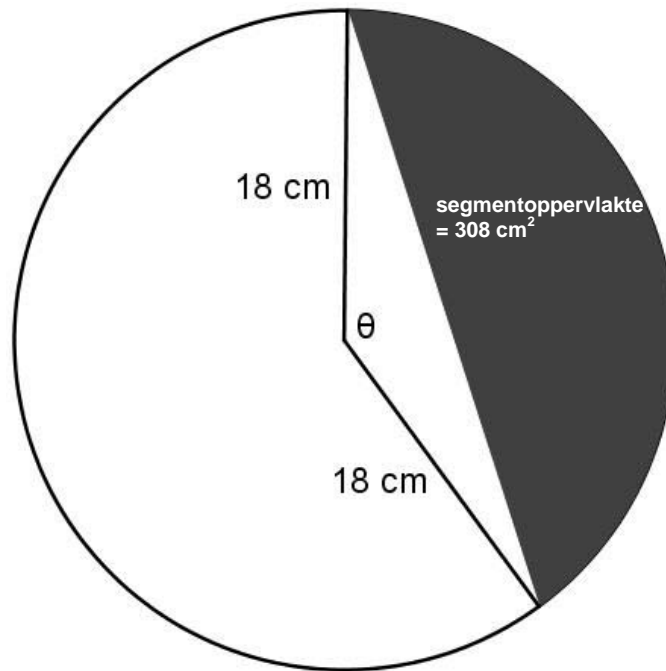
$$f(x) = \begin{cases} ax - b - 1, & x < 2 \\ bx^2 - ax + 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

Bepaal a en b indien f differensieerbaar is by $x = 2$. (10)

[20]

VRAAG 5

Beskou die diagram hieronder. Die gearseerde segment het 'n oppervlakte van 308 cm^2 .



- 5.1 Toon deur die gegewe oppervlakte te gebruik dat θ die volgende vergelyking bevredig: $162\theta - 162\sin\theta - 308 = 0$ (6)
- 5.2 Gebruik Newton-Raphson-herhaling om θ (in radiale) tot 5 desimale plekke te bepaal deur 'n aanvanklike benadering van 2 radiale te gebruik. Jy moet die iteratiewe formule noem wat jy gebruik het om jou antwoord te verkry. (8)
- [14]**

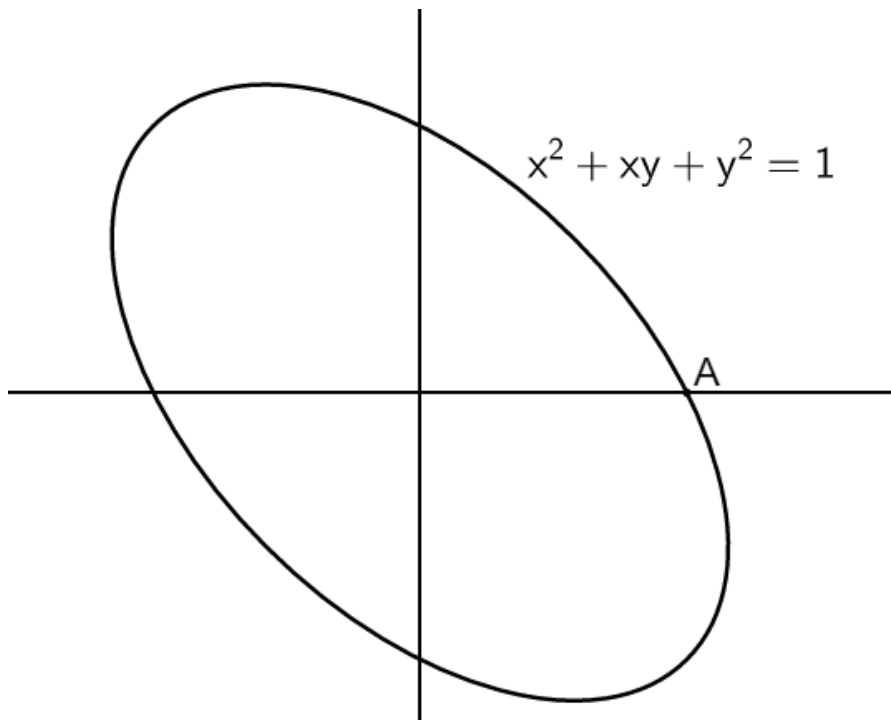
VRAAG 6

Beskou die funksie $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 4}$.

- 6.1 Bepaal die afsnitte met albei asse. (6)
- 6.2 Bepaal die vergelykings van enige asimptote. (8)
- 6.3 Bepaal die koördinate van enige stasionêre punte. (8)
- 6.4 Gebruik die feit dat $f''(x) = \frac{36}{(x-4)^3}$ om die aard van die stasionêre punte te bepaal wat jy in Vraag 6.3 verkry het. (4)
- [26]**

VRAAG 7

Die grafiek van 'n ellips met vergelyking $x^2 + xy + y^2 = 1$ word hieronder gegee.

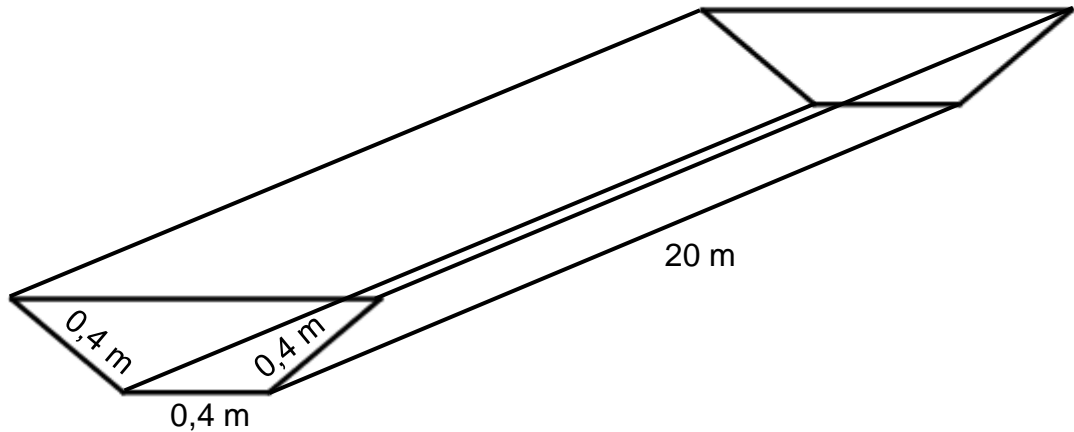


7.1 Gebruik implisiete differensiasie om te toon dat $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$. (5)

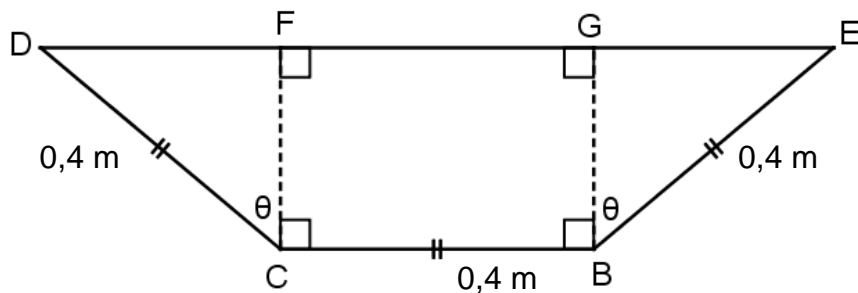
7.2 Bepaal vervolgens, of andersins, die vergelyking van die raaklyn aan die ellips by die punt A, die positiewe x-afsnit daarvan. (5)
[10]

VRAAG 8

'n Boer het 'n plat staalplaat met afmetings 20 m × 1,2 m. Hy wil 'n watertrog maak deur die sye op te vou soos wat in die diagram hieronder getoon word. Die ente van die trog sal afsonderlik gekonstrueer word en sal 'n regte hoek met die sye en basis vorm.



Die dwarsnit van die trog is soos volg:



8.1 Toon dat die volume V gegee word deur $V = 1,6 \sin 2\theta + 3,2 \cos \theta$. (8)

8.2 Bepaal vervolgens, of andersins, die grootte van θ wat die trog die maksimum volume sal gee. (8)
[16]

VRAAG 9

9.1 (a) Bewys dat $\sin^3 \theta = \sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta$. (4)

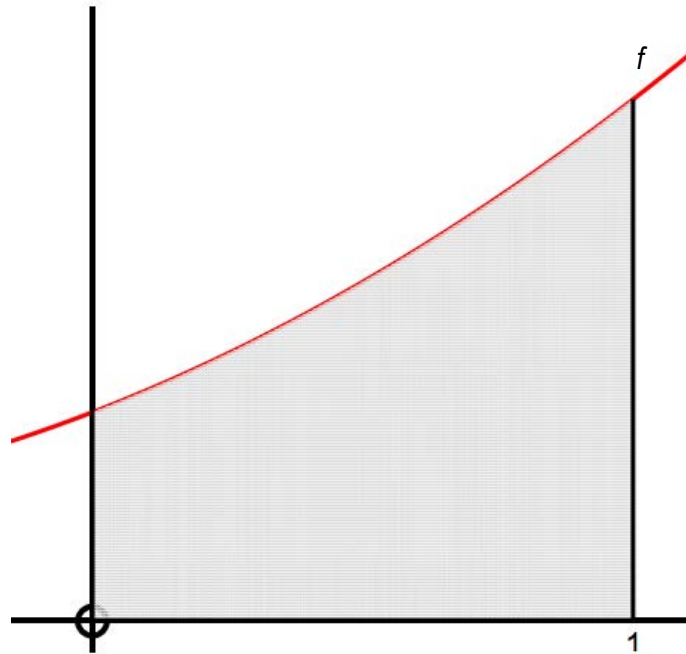
(b) Bepaal vervolgens, of andersins, $\int \sin^3 \theta d\theta$. (8)

9.2 Bepaal $\int \frac{x}{\sqrt{2+x}} dx$. (8)

[20]

VRAAG 10

Jessica probeer 'n Riemann-som om die oppervlakte te bepaal wat deur die kromme f , die x -as, die y -as en die lyn $x = 1$ begrens word, soos hieronder getoon:



Sy het korrek bepaal dat indien sy n reghoeke gebruik, die oppervlakte soos volg sal wees:

$$\text{Oppervlakte} = \frac{10}{3} + \frac{3}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

- 10.1 Bepaal die oppervlakte wanneer vier reghoeke gebruik word. (3)
- 10.2 Sal dit 'n onderbenadering of 'n oorbenadering wees? Verduidelik jou antwoord. (3)
- 10.3 Bepaal die presiese oppervlakte. (3)
- 10.4 Bepaal die waarde van $\int_{-1}^0 f(-x) dx$ en verduidelik jou antwoord. (3)

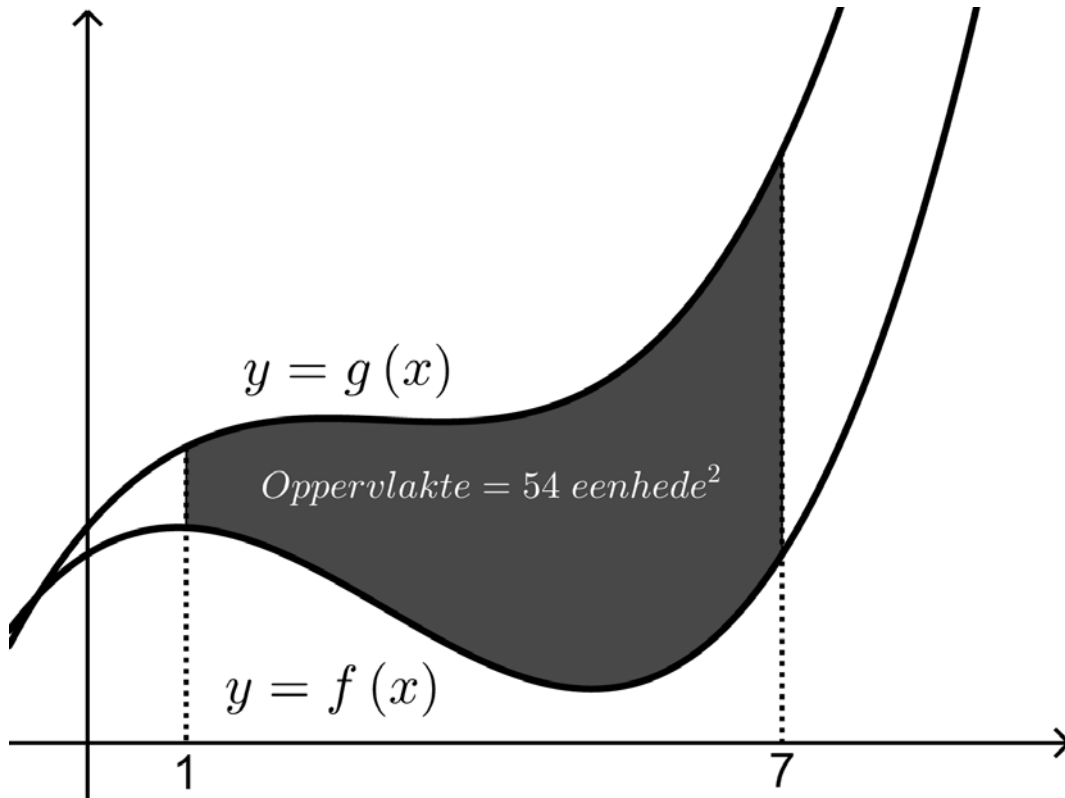
[12]

VRAAG 11

In die diagram hieronder is die funksie $f(x)$ geteken.

Die funksie $g(x) = f(x) + kx + 1$, met k rasionaal, is ook geteken.

Indien die oppervlakte wat deur die twee funksies en die lyne $x = 1$ en $x = 7$ begrens word 54 eenhede^2 is, bepaal die waarde van k .



[12]

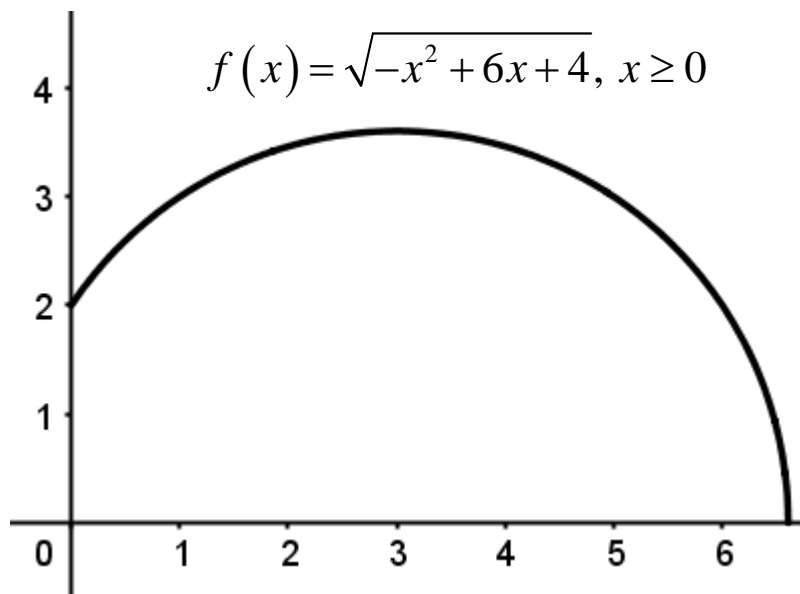
VRAAG 12

'n Parfuumbottel is in die vorm van 'n afgekapte sfeer met 'n plat onderkant soos in die foto getoon.



Beeld uit: <https://www.newchic.com/fragrance-4359/p-1124134.html?rmmds=search&r_keywords=spray-perfume>

Een helfte van die bottel kan gemodelleer word deur die funksie f te gebruik, wat hieronder geïllustreer word (met eenhede in cm). Stel jou voor die bottel is op sy sy gedraai en die basis van die bottel is op die y -as.



Tot watter hoogte moet die bottel gevul word indien dit 175 ml parfuim moet bevat? Onthou dat $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$.

[12]

Totaal: 200 punte