GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2017

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL II

Tyd: 1 uur | 100 punte

LEES ASSEBLIEF DIE VOLGENDE INSTRUKSIES NOUKEURIG

1. Hierdie vraestel bestaan uit 14 bladsye, 'n Antwoordblad (Module 4) van 2 bladsye (i–ii) en 'n Inligtingsboekie van 4 bladsye (i–iv). Maak asseblief seker dat jou vraestel volledig is.

2. Hierdie vraestel bestaan uit DRIE modules:

   Kies **EEN** van die **DRIE** modules:

   MODULE 2: STATISTIEK (100 punte) OF
   MODULE 3: FINANSIES EN MODELLERING (100 punte) OF
   MODULE 4: MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE (100 punte)

3. Nieprogrammeerbare en niegrafiese sakrekenaars mag gebruik word.

4. Al die nodige berekeninge moet duidelik getoon word en handskrif moet leesbaar wees.

5. Diagramme is nie op skaal geteken nie.

6. **Afronding van finale antwoorde:**

   MODULE 2: **Vier** desimale plekke, tensy anders vermeld.
   MODULE 3: **Twee** desimale plekke, tensy anders vermeld.
   MODULE 4: **Twee** desimale plekke, tensy anders vermeld.

MODULE 2 STATISTIEK

VRAAG 1

1.1 James het 12 vriende, sewe meisies en vyf seuns. Hy word toegelaat om net vyf vriende na sy verjaardagpartytjie toe te nooi. Wat is die waarskynlikheid dat drie van die vriende wat hy ewekansig na sy partytjie toe nooi seuns is? (6)

1.2 Arieb merk op dat 70% van die huishoudings in sy voorstad 'n elektriese heining om die omtrek van hul eiendom het. Bepaal die waarskynlikheid dat in 'n ewekansige steekproef van 10 huishoudings in sy voorstad 7 van hulle 'n elektriese heining sal hê. (5)

1.3 Drie identiese koppies koffie, twee identiese koppies latte en twee identiese koppies warm sjokolade word in 'n ry gerangskik. Bereken die getal rangskikkings van die sewe koppies warm drankies indien:

(a) die eerste en laaste koppie in die ry dieselfde tipe warm drankie is. (6)

(b) die drie koppies koffie almal langs mekaar is en geen ander warm drankie langs dieselfde tipe warm drankie is nie. (6)

[23]

VRAAG 2

2.1 'n Ewekansige veranderlike X het 'n waarskynlikheidsmassafunksie:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0{,}3 \times (0{,}7)^x & \text{vir } x \in \{1, 2, 3, 4\} \\ C & \text{vir } x = 5 \\ 0 & \text{andersins} \end{cases}$$

(a) Bepaal die waarde van C. (6)

(b) Bepaal P(X > 3). (3)

2.2 (a) Watter formule moet gebruik word om 'n vertrouensinterval vir die populasieproporsie te bepaal? (A of B)

(A) $p \pm z\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ (B) $\bar{x} \pm z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (1)

(b) Carla het 'n opname gedoen oor die voorkeur vir donker sjokolade bo melksjokolade. Haar bevindings is soos volg:

Wanneer 'n steekproef van 500 mense gebruik word, is die α%-vertrouensperke vir die proporsie mense wat donker sjokolade verkies 0,2278 en 0,2922.

(i) Toon dat die getal mense in die steekproef van 500 wat donker sjokolade verkies, 130 is. (4)

(ii) Bepaal vervolgens α deur die korrekte vertrouensinterval-formule te gebruik. (6)

[20]

VRAAG 3

Die lengtes van nuwe vetkryte is normaal verdeel met 'n gemiddelde van 9 cm en 'n standaardafwyking van 0,1 cm.

3.1 Bepaal die waarskynlikheid dat 'n vetkryt wat ewekansig gekies word 'n lengte groter as 8,9 cm sal hê. (6)

3.2 Bepaal die waarskynlikheid dat in 'n ewekansige steekproef van ses vetkryte, minstens twee 'n lengte van groter as 8,9 cm sal hê. (8)

3.3 4% van die vetkryte word as te kort beskou en kan nie verkoop word nie. Wat is die minimum lengte van 'n vetkryt wat verkoop kan word? (6)

[20]

VRAAG 4

4.1 Vyf pare waardes vir die veranderlikes x en y word in die tabel hieronder gegee.

x	1	m	$m + 1$	4	5
y	5	$t - 1$	4	3	t

Gegee: $\Sigma x^2 = 55$ en $\bar{y} = 3$

(a) Toon dat $m = t = 2$. (8)

(b) Bepaal vervolgens die korrelasiekoëffisiënt vir die stel data. (1)

(c) (i) Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn. (3)

(ii) Beraam die y-waarde indien $x = 6$ en lewer kommentaar op die betroubaarheid van hierdie beraming. (3)

4.2 Die getal ure wat Basi in 'n week aan haar nuwe onderneming bestee, is normaal verdeel met 'n standaardafwyking van 4,8 uur. In die verlede was die gemiddelde werksure per week 49,5 uur. Vanweë 'n verandering in haar skedule wil Basi toets of die gemiddelde werksure per week afgeneem het. Sy kies 'n ewekansige steekproef van 40 weke en merk op die totale getal ure wat sy gedurende hierdie weke aan haar onderneming bestee het, is 1 920 uur.

Toets Basi se hipotese by die 7%-betekenispeil. Maak seker jy meld 'n gevolgtrekking op grond van jou toets. (10)

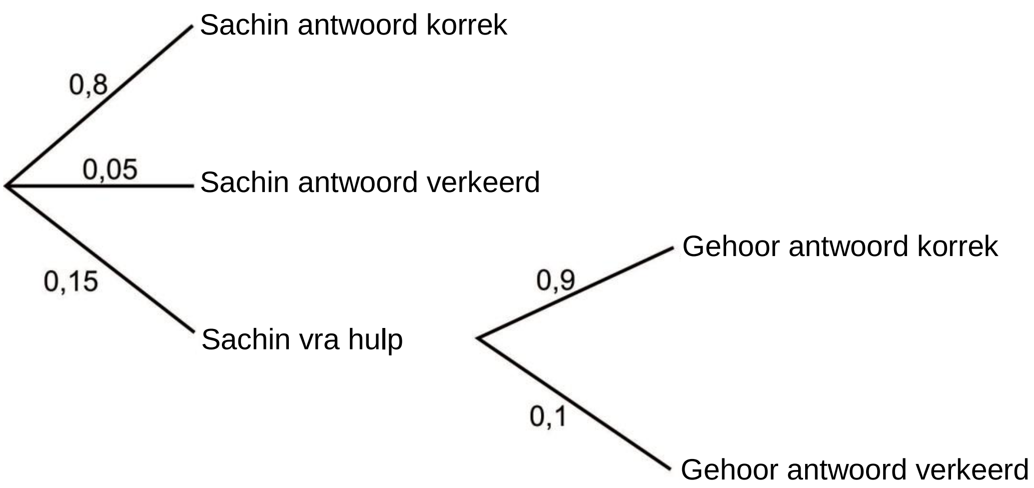
[25]

VRAAG 5

Sachin probeer die TV-vasvra *Who Wants To Be A Millionaire*. Hy moet vrae een na die ander beantwoord. Die vasvra eindig wanneer 'n vraag verkeerd beantwoord word.

- Die waarskynlikheid dat Sachin self die korrekte antwoord op enige vraag gee, is 0,8.
- Die waarskynlikheid dat Sachin self 'n verkeerde antwoord op enige vraag gee, is 0,05.
- Die waarskynlikheid dat Sachin besluit om hulp te vra vir enige vraag is 0,15.

By die eerste geleentheid wat Sachin besluit om hulp te vra, vra hy die gehoor. Die waarskynlikheid dat die gehoor die korrekte antwoord op enige vraag gee, is 0,9. Die inligting word in die boomdiagram hieronder getoon.



5.1 Bepaal die waarskynlikheid dat die eerste vraag wat gevra word, korrek beantwoord sal word. (4)

5.2 By die tweede geleentheid wat Sachin besluit om hulp te vra, skakel hy 'n vriend. Die waarskynlikheid dat sy vriend die korrekte antwoord op enige vraag gee, is 0,7.

Beskou al die moontlike opsies en bereken die waarskynlikheid dat die eerste twee vrae korrek beantwoord sal word. (8)

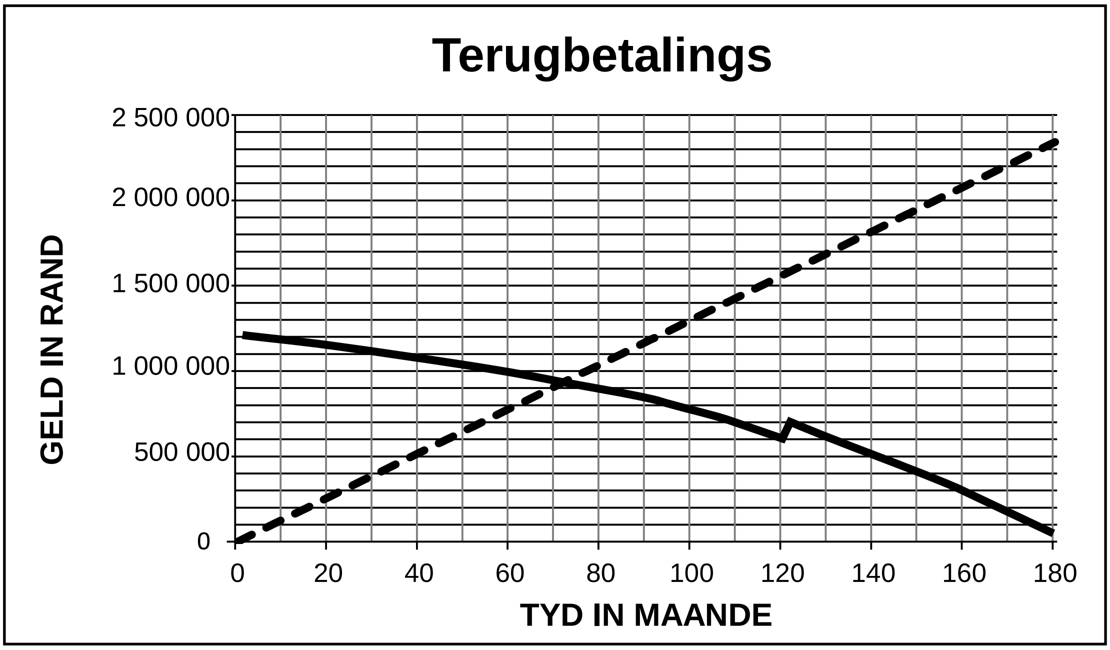
[12]

Totaal vir Module 2: 100 punte

MODULE 3 FINANSIES EN MODELLERING

VRAAG 1

Ntsiko het 'n huislening verkry. In die grafiek hieronder verteenwoordig die soliede kromme haar uitstaande saldo op die lening oor die ooreengekome tydperk. Die ophoping van haar ooreenstemmende gelyke maandelikse betalings oor dieselfde tydperk word deur die stippellyn verteenwoordig.



1.1 Skryf die waarde van Ntsiko se aanvanklike huislening neer. (1)

1.2 Na hoeveel maandelikse betalings is R1 000 000 van Ntsiko se lening nog uitstaande? (1)

1.3 Ongeveer hoeveel rente sal Ntsiko betaal het teen die tyd dat sy die lening geamortiseer het? (2)

1.4 Wat is die uitstaande saldo wanneer sy soveel betaal het as wat sy nog skuld? (2)

1.5 Op 120 maande is die aanvanklike voorwaardes van die lening duidelik verander.

(a) Hoe weet ons Ntsiko se maandelikse betaling is **nie** verander nie? (2)

(b) Wat is verander? En hoe is dit verander? (2)

[10]

VRAAG 2

Jude het 'n lening verkry teen 'n jaarlikse rentekoers van 5,68%, maandeliks saamgestel. Hy sal die lening amortiseer met gelyke maandelikse paaiemente van R5 154,26 wat oor drie maande begin, en die terugbetaling voltooi binne drie jaar vanaf die datum waarop die lening toegestaan is.

2.1 Bereken die waarde van die lening, korrek tot die naaste rand. (6)

2.2 Bereken die uitstaande saldo op die lening twee jaar nadat dit goedgekeur is. (5)

2.3 Bereken hoeveel rente Jude gedurende die tweede jaar betaal het indien R116 674,09 die uitstaande saldo was een jaar nadat die lening goedgekeur is. (5)

[16]

VRAAG 3

Agt jaar gelede het 'n maatskappy kantoortoerusting vir R3 400 000 gekoop. Die toerusting word nou gewaardeer op R2 000 000. Hierdie syfer word bereken deur verminderendesaldo-waardevermindering te gebruik, en neem die verhoogde waarde van die toerusting vanweë inflasie in ag.

3.1 Bereken die gedepresieerde waarde van die toerusting **sonder** dat inflasie in ag geneem word. Neem aan dat die inflasiekoers konstant was teen 6,8% per jaar, jaarliks saamgestel. (4)

3.2 Bereken die jaarlikse koers van verminderendesaldo-waardevermindering op die waarde van die toerusting (dit wil sê **sonder** dat inflasie in ag geneem word) as 'n persentasie, korrek tot twee desimale. (4)

3.3 Die maatskappy besluit om 'n delgingsfonds te skep (om die toerusting te vervang) wat oor die volgende ses jaar tot R5 500 000 aangroei. **Halfjaarlikse** betalings (dit wil sê, elke ses maande) sal aan die fonds gedoen word, wat onmiddellik begin en eindig twee jaar voor die fonds uitkeerbaar word. 'n Eenmalige onttrekking van R300 000 vir instandhouding van die huidige toerusting moet drie jaar nadat die fonds begin is, gedoen word. Bereken die waarde van die halfjaarlikse betalings indien die fonds rente verdien teen 'n koers van 7,64% per jaar, **maandeliks** saamgestel. (18)

[26]

VRAAG 4

In die Augrabies Wildtuin (Noord-Kaap) is kokerbome selfvermeerderend met ongeveer 5% nuwe bome wat elke jaar oorleef. Veldwagters het egter opgemerk dat die ouer bome teen 'n koers van 50 per jaar doodgaan. Daar is tans ongeveer 6 500 kokerbome in die wildtuin.

Veldwagters het uitgevind dat erdvarke hulle teen die ouer bome krap en sodoende die bas beskadig, wat die bome vatbaarder maak vir infeksie. Daar is tans ongeveer 1 300 erdvarke in die wildtuin, met geen ware roofdiere nie.

Die veldwagters het bereken dat, solank die erdvarkpopulasie minder as 25% van die kokerboompopulasie bly, geen permanente ekologiese skade aangerig sal word nie. Die tabel hieronder teken die populasie kokerbome en erdvarke onvolledig aan:

	Kokerbome	**Erdvarke**
P_0	6 500	1 300
P_1	6 775	1 396
P_2	7 064	1 500
P_3	7 367	1 610
P_4	7 685	1 730
P_5	**A**	1 858
P_6	**B**	1 995
P_7	**C**	2 143
P_8	**D**	2 301
P_9	**E**	2 472
P_{10}	**F**	2 655

4.1 Gebruik inligting uit die tabel en bereken die jaarlikse intrinsieke groeikoers vir die erdvarke as 'n persentasie, korrek tot een desimale plek. (4)

4.2 Gee 'n rekursieformule wat die kokerboompopulasie modelleer. (4)

4.3 Voltooi die tabel deur die waardes A tot F vir die kokerboompopulasie te bereken. Rond af tot die naaste heelgetalwaarde. (3)

4.4 Gedurende watter jaar sal die erdvarke volgens hierdie syfers begin om permanente ekologiese skade aan die kokerboompopulasie aan te rig? (2)

4.5 Verduidelik uit die gegewe erdvarkpopulasiesyfers hoe dit duidelik is dat 'n Malthusiese model in plaas van 'n logistiese model gebruik is. (3)

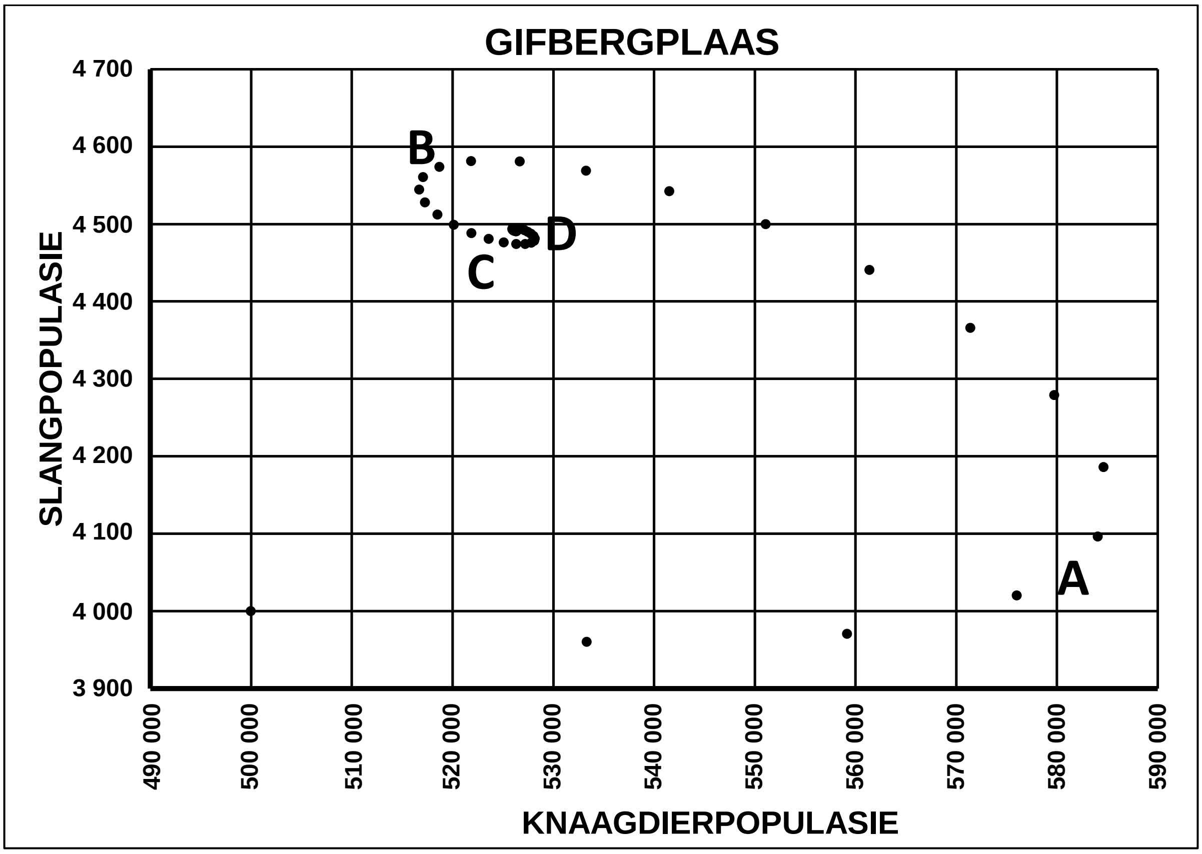
[16]

VRAAG 5

Gifberg is 'n gewilde stappersbestemming in die afgeleë berge naby Van Rhynsdorp in die Wes-Kaap. Die fasestipping hieronder teken die slang- en knaagdierpopulasie vir eenjaarintervalle oor 'n eeu aan, volgens die Lotka-Volterra-model.

Twee uit elke drie knaagdiere is vroulik en elkeen dra 'n werpsel van ongeveer agt kleintjies elke vier maande. Die oorlewingsyfer van die kleintjies is taamlik laag teen 5% per jaar. Die populasie knaagdiere word geraam op ongeveer 500 000 en 533 300 in Jaar 0 en Jaar 1 onderskeidelik.

Die lewensverwagting van slange is vyf jaar en hul aanvanklike populasie is ongeveer 4 000.



5.1 Gebruik die fasestipping om die volgende vrae te beantwoord:

(a) Lees die ewewigspunte vir die roofdier- en prooipopulasie af. (2)

(b) Gee die slangpopulasie wanneer die knaagdierpopulasie op sy maksimum is. (2)

(c) Gee die gebied (A, B, C of D) op die fasestipping waar beide populasies afneem. (2)

5.2 Indien 760 slange in die eerste jaar gebore is, bereken die slangpopulasie aan die einde van die eerste jaar. (5)

5.3 Bereken die jaarlikse intrinsieke groeikoers van die knaagdiere. (5)

5.4 Ongeveer 40% van die knaagdierpopulasie is binne die eerste jaar doodgemaak. Bereken, tot die naaste duisend, wat die dravermoë van die plaas vir knaagdiere is. (6)

[22]

VRAAG 6

Theos was 'n Griekse wiskundige van die tweede eeu voor Christus. Hy het hom met irrasionale getalle besig gehou en vorendag gekom met 'n paar fassinerende vermoedens, waaronder:

Vermoede 1: Indien $T_n = \frac{a}{b}$ 'n benadering is van $\sqrt{2}$, dan is $\frac{a+2b}{a+b}$ 'n beter benadering.

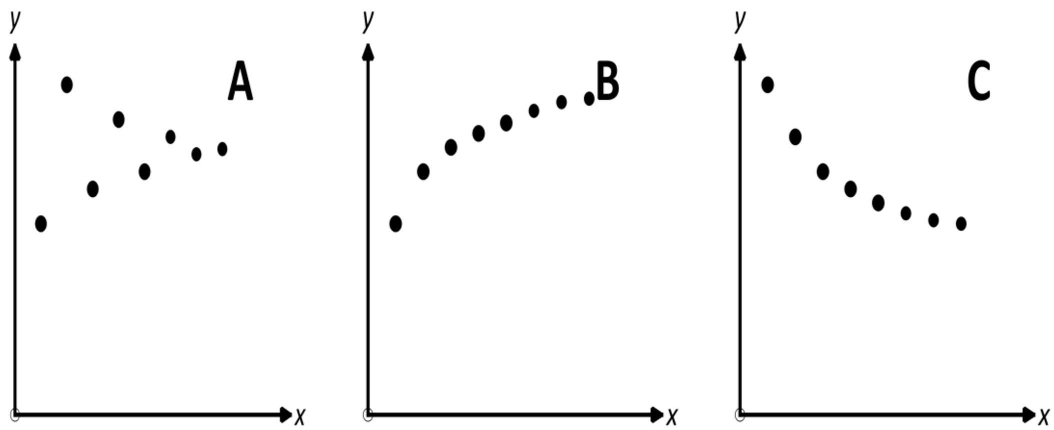
Vermoede 2: Indien $T_n = \frac{a}{b}$ 'n benadering is van $\sqrt{3}$, dan is $\frac{2a+3b}{a+2b}$ 'n beter benadering.

6.1 Theos het Vermoede 1 as 'n eersteorde-rekursieformule geskryf: $T_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+T_n}$

Vermoede 1: $\sqrt{2} \approx 1,414\,214$ (korrek tot ses desimale plekke)

(a) Gebruik T_0 = 1,5: Watter herhaling is die eerste om die waarde van $\sqrt{2}$ akkuraat te benader, korrek tot ses desimale plekke? (2)

(b) Watter grafiek hieronder beskryf die herhalingsproses soos dit tot $\sqrt{2}$ konvergeer die beste?



(2)

6.2 Ontwerp 'n eersteorde-rekursieformule vir Theos om die waarde van $\sqrt{3}$ te genereer. (6)

[10]

Totaal vir Module 3: 100 punte

MODULE 4 MATRIKSE EN GRAFIEKTEORIE

VRAAG 1

1.1 Beskou die matriksvergelyking $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = M$.

(a) Gee die dimensie van matriks M. (2)

(b) Bereken die waarde van k indien M die nulmatriks is. Toon relevante berekeninge. (8)

1.2 Drie 3 × 3 matrikse word gegee, sodanig dat det(A) = p, det(B) = q, det(C) = r. Druk die volgende uit as 'n numeriese waarde, of in terme van p, q en/of r:

(a) $\det(B.B^{-1})$ (2)

(b) det(A.C) (2)

(c) det(3A) (2)

(d) $\det(AB^{-1}C^{T})$ (2)

[18]

VRAAG 2

Draco (D), Jinny (J), Luna (L) en Neville (N) het elkeen 'n ander stel van drie vergelykings ontvang om gelyktydig op te los. Deur Gauss-reduksie te gebruik verkry hulle die volgende aangevulde matrikse:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -18 \end{pmatrix}$$

2.1 Neville besef dat sy stel vergelykings 'n unieke oplossing sal oplewer. Voltooi sy ryreduksie, en gee die oplossing vir sy stel gelyktydige vergelykings. (6)

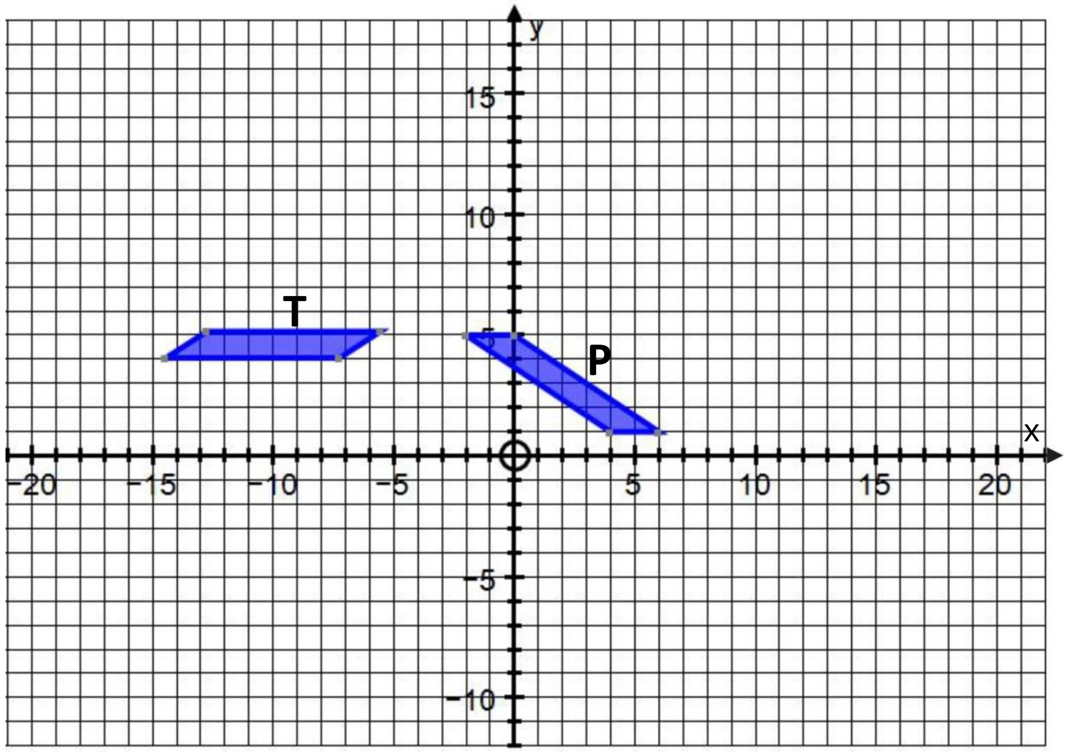
2.2 Wie se stel vergelykings lewer geen oplossings op nie? Regverdig jou keuse. (3)

2.3 Wie se stel vergelykings lewer oneindige oplossings op? Regverdig jou keuse. (3)

[12]

VRAAG 3

In die skets hieronder is P en T twee parallelogramme in 'n Cartesiese vlak.
Die koördinate van die hoekpunte van P is (–2; 5), (0; 5), (6; 1) en (4; 1).



3.1 Skets en benoem die volgende transformasies van P op die **ANTWOORDBLAD**:

(a) A, dit wil sê P getransformeer deur die matriks $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (3)

(b) R, dit wil sê P getransformeer deur die matriks $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. (3)

(c) M, dit wil sê P getransformeer deur die matriks $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. (4)

(d) S, dit wil sê P getransformeer deur die matriks $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4)

3.2 T is 'n beeld van P nadat P om die oorsprong deur 'n skerphoek van ϴ geroteer is en toe 10 eenhede na links en 1 eenheid op verplaas is. Die punt op P met koördinate (6; 1) lê nou op T by (–5,55; 5,15). Bereken die hoek ϴ waardeur P geroteer is, korrek tot een desimale plek. (12)

[26]

VRAAG 4

Die vier nodusmatrikse *P*, *Q*, *R* en *S* wat hieronder gegee word, verteenwoordig vier grafieke.
'n "1" in die matriks dui aan dat die twee nodusse direk met mekaar verbind is deur 'n skakel.
'n "0" dui aan dat die twee nodusse nie direk met mekaar verbind is deur 'n skakel nie.

P =

	A	B	C	D	E
A	0	1	1	1	0
B	1	0	0	1	1
C	1	0	0	0	1
D	1	1	0	0	0
E	0	1	1	0	0

Q =

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	0
B	1	0	0	1	1
C	0	0	0	0	1
D	1	1	0	0	0
E	0	0	0	0	0

R =

	A	B	C	D	E
A	1	1	0	1	0
B	1	1	0	1	1
C	0	0	1	0	1
D	1	1	0	1	0
E	0	0	0	0	1

S =

	A	B	C	D	E
A	0	0	0	1	1
B	0	0	1	0	0
C	0	1	0	0	0
D	1	0	0	0	1
E	1	0	0	1	0

4.1 Hoeveel skakels het grafiek P? (2)

4.2 Hoe weet ons uit die nodusmatriks dat grafiek Q 'n gerigte grafiek is? (2)

4.3 Hoe weet ons uit die nodusmatriks dat grafiek R 'n multigrafiek is? (2)

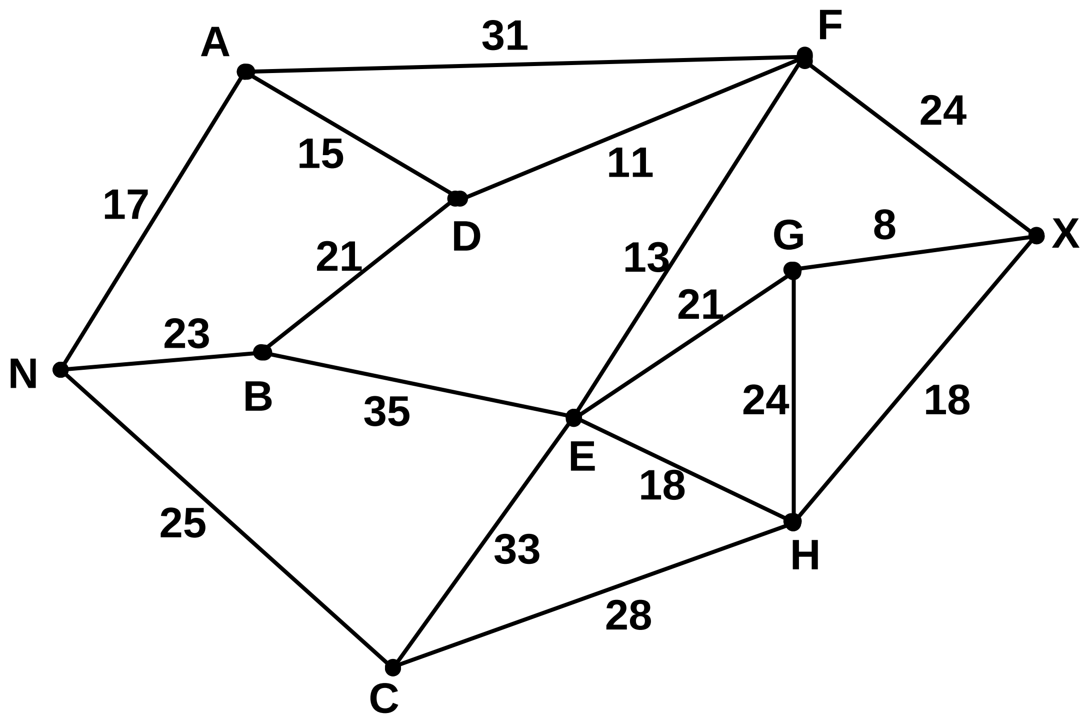
4.4 Teken grafiek S om te toon dat dit **nie** 'n samehangende grafiek is nie. (4)

[10]

VRAAG 5

Grotduik het 'n gewilde sport geword, veral in provinsies wat nie naby die see is nie. Divac besluit om die Komati Springs in Mpumalanga met sy agt onderwatergrotte te besoek.

In die grafiek hieronder verteenwoordig nodusse A tot H die agt grotte, met die ingang en uitgang van die netwerk onderskeidelik as N en X aangedui. Die gewig van die skakels verteenwoordig die tyd in minute wat 'n gemiddelde duiker neem om van een grot na die volgende een te swem, met 'n bietjie verkenningstyd ingesluit vir elke grot wat besoek word.



5.1 Divac wil die minimum tyd beraam wat dit sal neem om al agt grotte te besoek, wat begin wanneer hy die netwerk binnegaan totdat hy weer uitgaan. Gebruik **Prim se algoritme** om 'n ondergrens te bepaal deur by N te begin, en E aanvanklik uit te laat. (10)

5.2 Beantwoord hierdie vraag op die **ANTWOORDBLAD** en lewer bewys van jou denkprosesse.

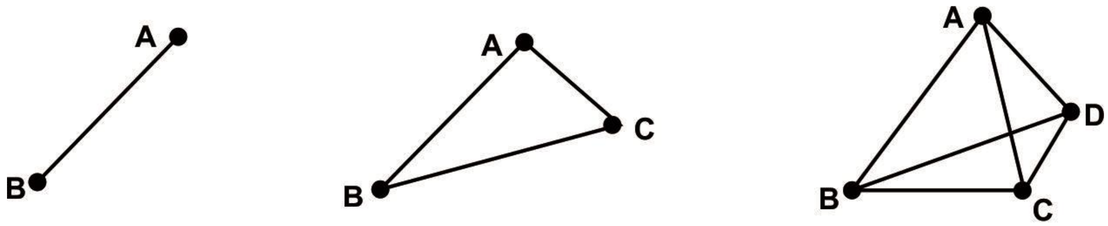
Divac kan net genoeg suurstof vir 90 minute neem, maar wil minstens die helfte van die grotte besoek. Gebruik **Dijkstra se algoritme** om 'n optimaletyd-roete vir hom te bepaal deur by N te begin en minstens die helfte van die grotte te besoek voor hy weer by X eindig. Gee die optimale roete, sowel as die tyd daarvan duidelik. (12)

[22]

VRAAG 6

In 'n **volledige** grafiek is elke nodus direk met elke ander nodus verbind. 'n Volledige grafiek word aangedui deur K_n, waar n die getal nodusse in die grafiek is.

'n Paar voorbeelde van volledige grafieke word hieronder gegee:



K_2 K_3 K_4

6.1 Beantwoord in terme van n:

(a) Noem die graad van K_n. (2)

(b) Noem die som van die grade van die nodusse van K_n. (2)

6.2 Deur by A te begin kan die volgende gesien word:

K_2 het een Hamilton-kring, naamlik, A B A.
K_3 het twee Hamilton-kringe, naamlik, A B C A en A C B A.
K_4 het ses Hamilton-kringe, waarvan twee A B C D A en A D C B A is.

(a) Noem die oorblywende vier Hamilton-kringe in K_4. (5)

(b) Indien dit bekend is dat K_5 en K_6 onderskeidelik 24 en 120 Hamilton-kringe het, druk die getal Hamilton-kringe van die volledige grafiek K_n in terme van n uit. (3)

[12]

Totaal vir Module 4: 100 punte