GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2021

# GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
# MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA

## NASIENRIGLYNE

Tyd: 2 uur 200 punte

---

**Hierdie nasienriglyne is opgestel vir gebruik deur eksaminators en hulpeksaminators van wie verwag word om almal 'n standaardiseringsvergadering by te woon om te verseker dat die riglyne konsekwent vertolk en toegepas word by die nasien van kandidate se skrifte.**

**Die IEB sal geen bespreking of korrespondensie oor enige nasienriglyne voer nie. Ons erken dat daar verskillende standpunte oor sommige aangeleenthede van beklemtoning of detail in die riglyne kan wees. Ons erken ook dat daar sonder die voordeel van die bywoning van 'n standaardiseringsvergadering verskillende vertolkings van die toepassing van die nasienriglyne kan wees.**

---

## VRAAG 1

1.1 Los op vir $x \in \mathbb{R}$:

(a) $2e^{x} - 7 + 6e^{-x} = 0$, druk antwoord in presiese vorm uit met gebruik van logs

$\therefore 2e^{2x} - 7e^{x} + 6 = 0$

$\therefore \left(2e^{x} - 3\right)\left(e^{x} - 2\right) = 0$

$\therefore e^{x} = \dfrac{3}{2}$ of $e^{x} = 2$

$\therefore x = \ln\dfrac{3}{2}$ of $x = \ln 2$

(b) $\left|2x+3\right| = 5x-2$

$\left|2x+3\right| = 5x-2$

$2x+3 = 5x-2$ of $2x+3 = -\left(5x-2\right)$

$\therefore 5 = 3x$ or of $x = -1$

$\therefore x = \dfrac{5}{3}$ or of $= -\dfrac{1}{7}$

Kontrolering toon dat slegs $x = \dfrac{5}{3}$ geldig is

(c) Los op: $\dfrac{\left(-x^{2}-5\right)\left(x^{2}-16\right)}{\left|x+3\right|\left(x+2\right)} \geq 0$

$\dfrac{\left(-x^{2}-5\right)\left(x^{2}-16\right)}{\left|x+3\right|\left(x+2\right)} \geq 0$

$\therefore \dfrac{\left(-x^{2}-5\right)\left(x^{2}-16\right)}{\left(x+2\right)} \geq 0$

$\therefore \dfrac{\left(x^{2}-16\right)}{\left(x+2\right)} \leq 0$

$\therefore \dfrac{\left(x-4\right)\left(x+4\right)}{\left(x+2\right)} \leq 0$

$\therefore x \leq -4$ of $-2 < x \leq 4$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| − | | − | | − | | + |
| − | | + | | + | | + |
| − | -4 | − | -2 | + | 4 | + |
| **−** | 0 | **+** | en | **−** | 0 | **+** |

1.2 Beskou die funksie: $f(x) = x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 29x - 30$

(a) Indien gegee word dat $x = 2 - i$ 'n wortel van die vergelyking $f(x) = 0$ is, skryf $f\ x$ as 'n produk van twee drieterme.

2 – $i$ en 2 + $i$ is wortels
$\therefore$ een van die drieterme is $x^2 - (2 - i + 2 + i)x + ((2 - i)(2 + i))$
$\therefore$ een van die drieterme is $x^2 - 4x + 5$
$\therefore f(x) = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - x - 6)$

(b) Los $f(x) = 0$ vervolgens op in $\mathbb{C}$.

$(x^2 - 4x + 5)(x^2 + x - 6) = 0$
$\therefore (x^2 - 4x + 5)(x + 3)(x - 2) = 0$
$\therefore x = 2 - i$ or $2 + i$ or -3 or 2

1.3 Kwande het 'n nuwe tipe komplekse getal genaamd 'n **Kwande-getal** gedefinieer. Dit het die eienskap dat $\text{Im}(z) = 2\text{Re}(z)$.
Met ander woorde, 'n **Kwande-getal** $z$ is van die vorm: $z = a + 2ai$

Bewys dat vir alle **Kwande-getalle** $\dfrac{z}{z^*} = -\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

$$\frac{z}{z^*} = \frac{a + 2ai}{a - 2ai}$$
$$= \frac{a + 2ai}{a - 2ai} \times \frac{a + 2ai}{a + 2ai}$$
$$= \frac{a^2 + 4a^2 i + 4a^2 i^2}{5a^2}$$
$$= \frac{-3a^2 + 4a^2 i}{5a^2}$$
$$= -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

## VRAAG 2

Die getal mense, $n$, in 'n skool met populasie $P$ wat 'n gerug gehoor het, kan deur die volgende funksie gemodelleer word:

$$n = P - Pe^{-0.14t}$$

waar $t$ die tyd (in dae) is wat verloop het sedert die gerug begin het.

(a) Maak $t$ die onderwerp van die formule.

$$n = P - Pe^{-0.14t}$$
$$\therefore Pe^{-0.14t} = P - n$$
$$\therefore e^{-0.14t} = \frac{P-n}{P}$$
$$\therefore -0.14t = \ln\left(\frac{P-n}{P}\right)$$
$$\therefore t = \frac{\ln\left(\frac{P-n}{P}\right)}{-0.14}$$

(b) Bepaal vervolgens hoeveel dae, tot die naaste dag, dit sal neem vir minstens 750 mense in 'n skool van 1 200 om die gerug te hoor.

$$\therefore t = \frac{\ln\left(\frac{1200-750}{1200}\right)}{-0.14}$$
$\therefore t$ = 7 dae

## VRAAG 3

Toon uit eerste beginsels die afgeleide van $f(x)=\dfrac{1}{2+3x}$ is $\dfrac{-3}{(2+3x)^2}$

$$f(x)=\frac{1}{2+3x}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+3(x+h)}-\frac{1}{2+3x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+3x+3h}-\frac{1}{2+3x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{(2+3x)-(2+3x+3h)}{(2+3x+3h)(2+3x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2+3x-2-3x-3h}{(2+3x+3h)(2+3x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-3h}{(2+3x+3h)(2+3x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3h}{(2+3x+3h)(2+3x)}\times\frac{1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{(2+3x+3h)(2+3x)}$$

$$=\frac{-3}{(2+3x)^2}$$

## VRAAG 4

Bewys dat $3^{2n+4} - 2^{2n}$ 'n veelvoud van 5 is vir alle $n \in \mathbb{N}$.

Indien $n$ = 1, dan het ons

$3^{2(1)+4} - 2^{2(1)} = 3^6 - 4 = 725$ wat 'n veelvoud is van 5
Dus is dit waar vir $n$ = 1

Neem aan waar vir $n = k$

$3^{2k+4} - 2^{2k} = 5p$ waar $p \in \mathbb{N}$ $(*)$

Nou in die geval waar $n = k + 1$ het ons

$$3^{2(k+1)+4} - 2^{2(k+1)} = 3^{2k+2+4} - 2^{2k+2}$$
$$= 3^2 \times 3^{2k+4} - 2^2 2^{2k}$$

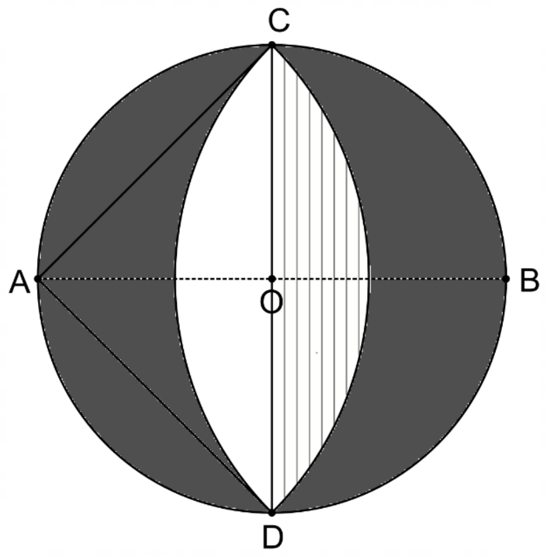
maar uit $(*) 3^{2k+4} = 5p + 2^{2k}$

dus, $3^{2(k+1)+4} - 2^{2(k+1)} = 9\left(5p + 2^{2k}\right) - 4 \times 2^{2k}$ – gebruik (*)
$$= 45p + 9 \times 2^{2k} - 4 \times 2^{2k}$$
$$= 5\left(9p + 2^{2k}\right)$$

wat duidelik 'n veelvoud van 5 is
Dus het ons dit waar bewys vir $n = k + 1$
Deur die beginsel van volledige induksie het ons dit waar bewys vir alle $n \in \mathbb{N}$

**VRAAG 5**

In die diagram hieronder het die sirkel met middelpunt O en middellyn AB 'n radius van 4 cm.
Sirkelboë word deur C en D getrek met A en B as middelpunte.




Bepaal die gearseerde oppervlakte.

$OA = OC = OD = 4$

$AC = AD = \sqrt{32}$ (pythag) Pythag

$\therefore OAC = OAD = 45° = \frac{\pi}{4}$ ($\angle s$ of isos. $\triangle$) – bepaal hoek

$\therefore CAD = 90° = \frac{\pi}{2}$ $\begin{pmatrix}\text{kan ook omgekeerde van Pythagoras} \\ \text{gebruik om dit te bepaal}\end{pmatrix}$

$\therefore$ oppervlakte gestreepte segment = oppervlakte sektor $ACD$ – opp$\triangle ACD$ – oppervlakte van segment

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{32}\right)^2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{32}\right)\left(\sqrt{32}\right)$$

$$= 8\pi - 16$$

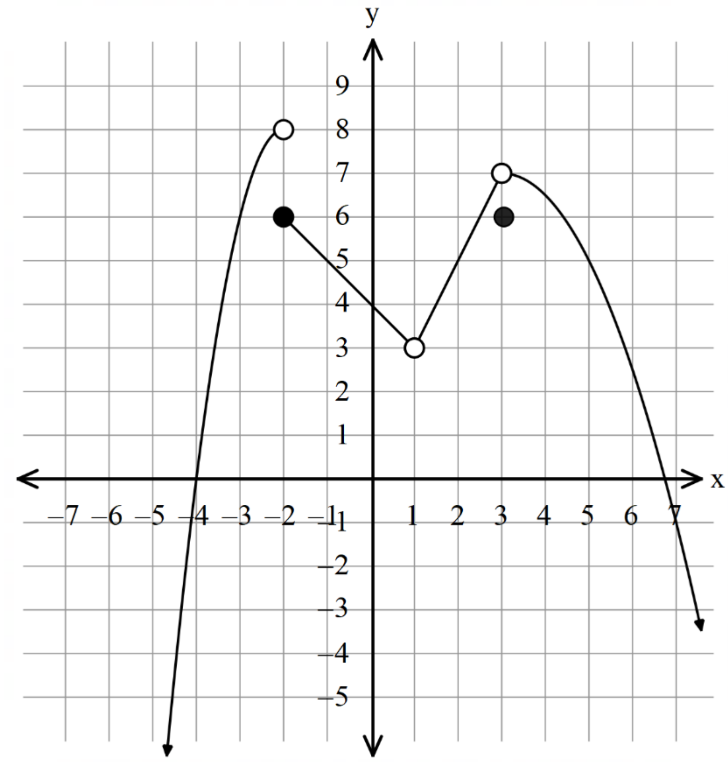
*Deur simmetrie is die ongearseerde oppervlakte* = $16\pi - 32$

*Oppervlakte van sirkel* $= \pi\left(4^2\right) = 16\pi$

*Dus is die gearseerde oppervlakte* $= 16\pi - (16\pi - 32) = 32\ cm^2$

## VRAAG 6

6.1 Beskou die grafiek van die funksie *f* wat hieronder getoon word.




Beantwoord die volgende vrae en gee noukeurig aandag aan die presisie van wiskundige notasie wat jy gebruik:

(a) Gebruik wiskundige notasie en regverdig waarom *f* diskontinu is by $x = -2$.

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

dus $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ bestaan nie

(b) Gebruik wiskundige notasie en regverdig waarom *f* diskontinu is by $x = 1$.

*f*(1) is nie gedefinieer nie

(c) Gebruik wiskundige notasie en regverdig waarom *f* diskontinu is by $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$

(d) Wat is die aard van die diskontinuïteit by $x = -2$?

Sprong / nieverwyderbaar

(e) Wat is die aard van die diskontinuïteit by $x = 3$?

verwyderbaar

6.2 Verduidelik waarom $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ nie bestaan nie.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\textit{maar} \ \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^+} (-1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{bestaan nie want} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$$

6.3 Beskou die funksie $g$ wat hieronder gedefinieer word.

$$f(x) = \begin{cases} -0.5x^2 + 2x + 3 & x \leq 2 \\ px^2 + qx + 13 & x > 2 \end{cases}$$

Gebruik toepaslike wiskundige notasie en bepaal die rasionale waardes van $p$ en $q$ indien $g$ differensieerbaar is by $x = 2$.

vir differensieerbaarheid benodig ons kontinuïteit

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = 5$$

dus benodig ons $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4p + 2q + 13 = 5$ *of* $4p + 2q = -8(1)$

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x + 2) = 0$$

dus benodig ons $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2px + q) = 4p + q = 0(2)$

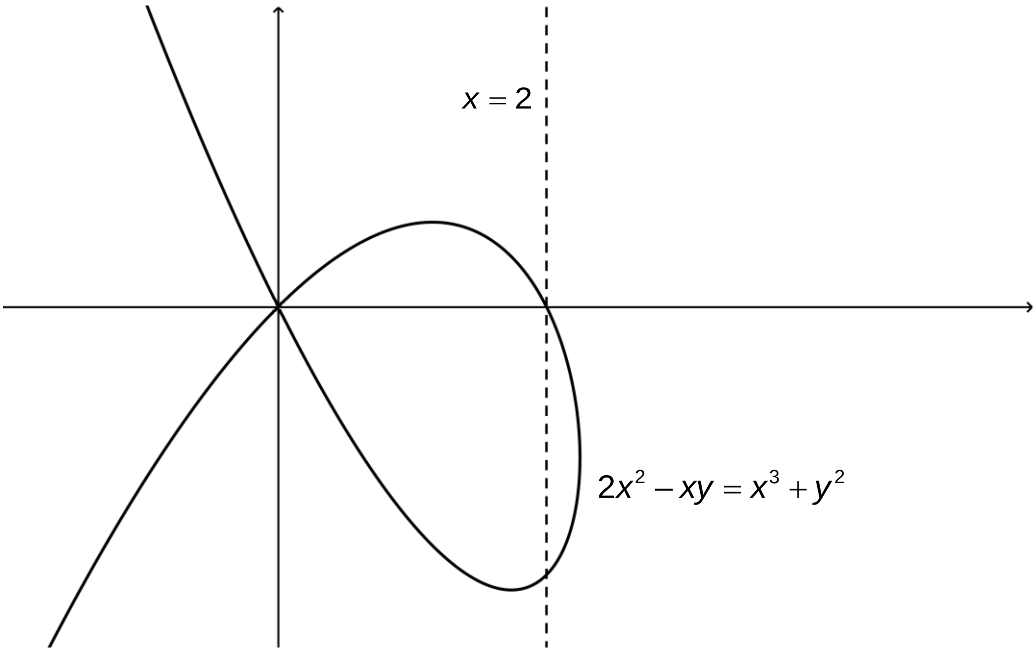
Los (1) en (2) gelyktydig op:

$q = -8$ en $p = 2$

## VRAAG 7

Die kromme $2x^2 - xy = x^3 + y^2$ het twee raaklyne waar die *x*-koördinaat van die raakpunt 2 is. Bepaal die vergelyking van die raaklyn met 'n positiewe gradiënt.




$2x^2 - xy = x^3 + y^2$

*Wanneer x* = 2:

$8 - 2y = 8 + y^2$

$\therefore y^2 + 2y = 0$

$\therefore y(y+2) = 0$

$\therefore y = 0$ of $-2$

$\therefore$ *raakpunt is* (2; –2)

*Nou lewer implisiete differensiasie:*

$4x - \left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 3x^2 + 2y\frac{dy}{dx}$

$\therefore 4x - y - x\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2y\frac{dy}{dx}$

$\therefore -x\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 3x^2 + y - 4x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y - 4x}{-x - 2y}$

by $(2;-2)$ $\frac{dy}{dx} = \frac{12 - 2 - 8}{-2 + 4} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore y + 2 = 1(x - 2)$

$\therefore y = x - 4$

## VRAAG 8

8.1 Bepaal vir elkeen van die gegewe funksies heelgetalwaarde(s) van *a* indien:

(a) $f(x)=\dfrac{ax^2+2x+3}{-\frac{1}{2}x^2+3x+4}$ 'n asimptoot $y=2$ het

ons benodig $\dfrac{a}{-\frac{1}{2}}=2$

$\therefore a=-1$

(b) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4x+a}$ asimptote $x=1$ en $x=3$ het

$(x-1)(x-3)$
$\therefore a=3$

(c) $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+3}{x+a}$ 'n asimptoot $y=2x-4$ het

$2x^2+2x+3=(x+a)(2x-4)+R$ – verstaan skuins asimptoot

$\therefore 2ax-4x=2x$
$\therefore 2ax=6x$
$\therefore a=3$

(d) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^a+3x+4}$ 'n asimptoot $y=0$ het

Ons benodig graad(noemer) > graad(teller) – verstaan horisontale asimptoot van $y = 0$
$\therefore a>2$

8.2 Bepaal die *x*-koördinaat(e) van die stasionêre punt(e) van: $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+1}{2x+3}$

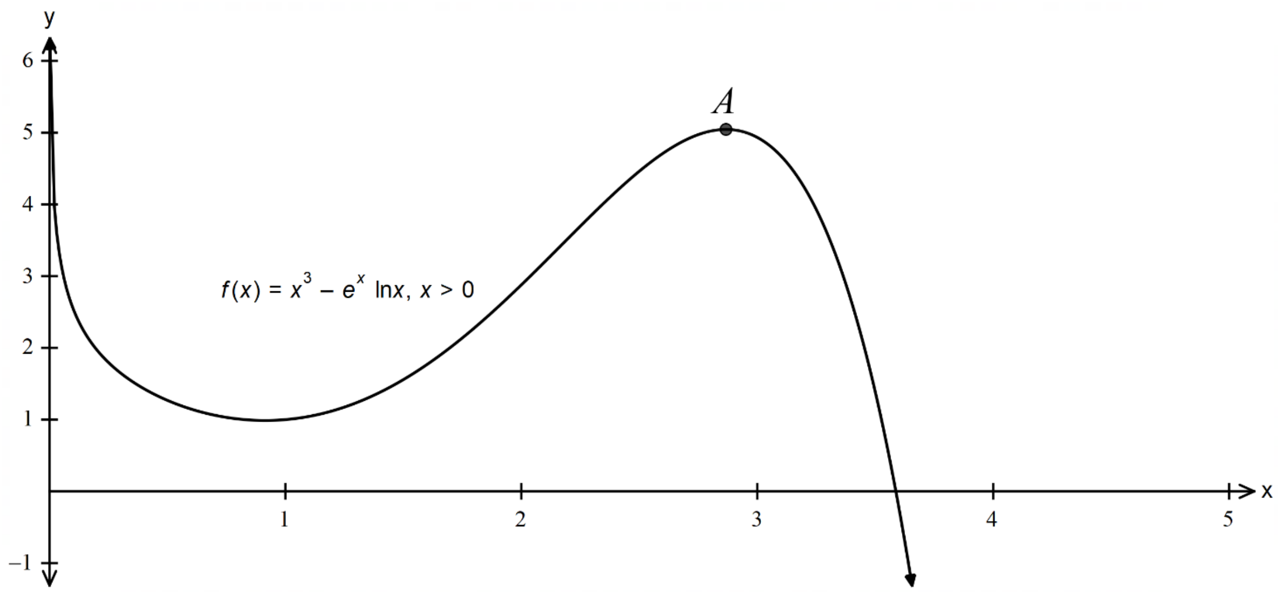
$\therefore f'(x)=\dfrac{(4x-7)(2x+3)-2(2x^2-7x+1)}{(2x+3)^2}=0$

$\therefore 4x^2+12x-23=0$
$\therefore x=1{,}33$ of $x=4{,}33$

## VRAAG 9

'n Gedeelte van die funksie $f(x) = x^3 - e^x \ln x,\ \ x > 0$ word getoon.




9.1 Toon dat die vergelyking hieronder die een sal wees wat jy sal moet oplos om die *x*-koördinaat van die lokale maksimum by punt A te bepaal.

$$3x^2 - e^x\left(\ln x + x^{-1}\right) = 0$$

By A, $f'(x) = 0$

$$\therefore 3x^2 - \left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right) = 0$$

$$\therefore 3x^2 - e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\therefore 3x^2 - e^x\left(\ln x + x^{-1}\right) = 0$$

9.2 Gebruik Newton-Raphson-iterasie om die *x*-koördinaat van A tot vyf desimale plekke te bepaal.

- Toon die iterasieformule wat jy gebruik.
- Gebruik $x_0 = 3$ as die eerste benadering.
- Toon die waarde vir $x_1$ tot vyf desimale plekke.

$$f(x) = 3x^2 - e^x \ln x - e^x x^{-1}$$

$$\therefore f'(x) = 6x - e^x \ln x - \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2}$$

$$\therefore x_{n+1} = x_n - \frac{3x^2 - e^x \ln x - e^x x^{-1}}{6x - e^x \ln x - \frac{2e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2}}$$

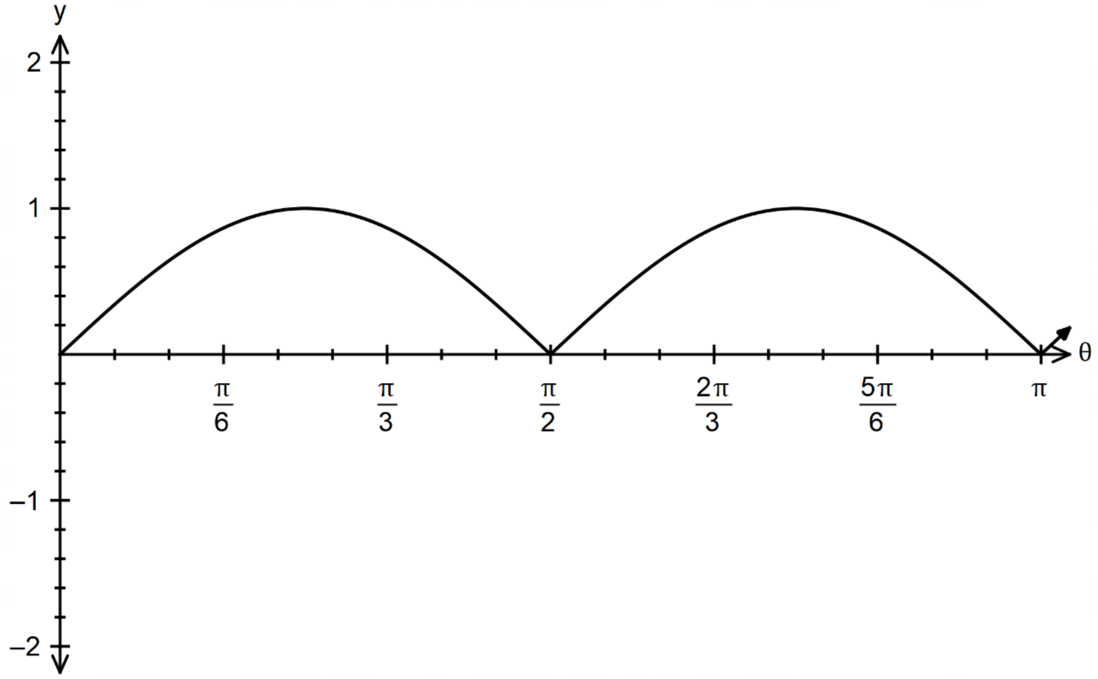
$$\therefore x_1 = 2.88431$$

$$\therefore x = 2.86743$$

## VRAAG 10

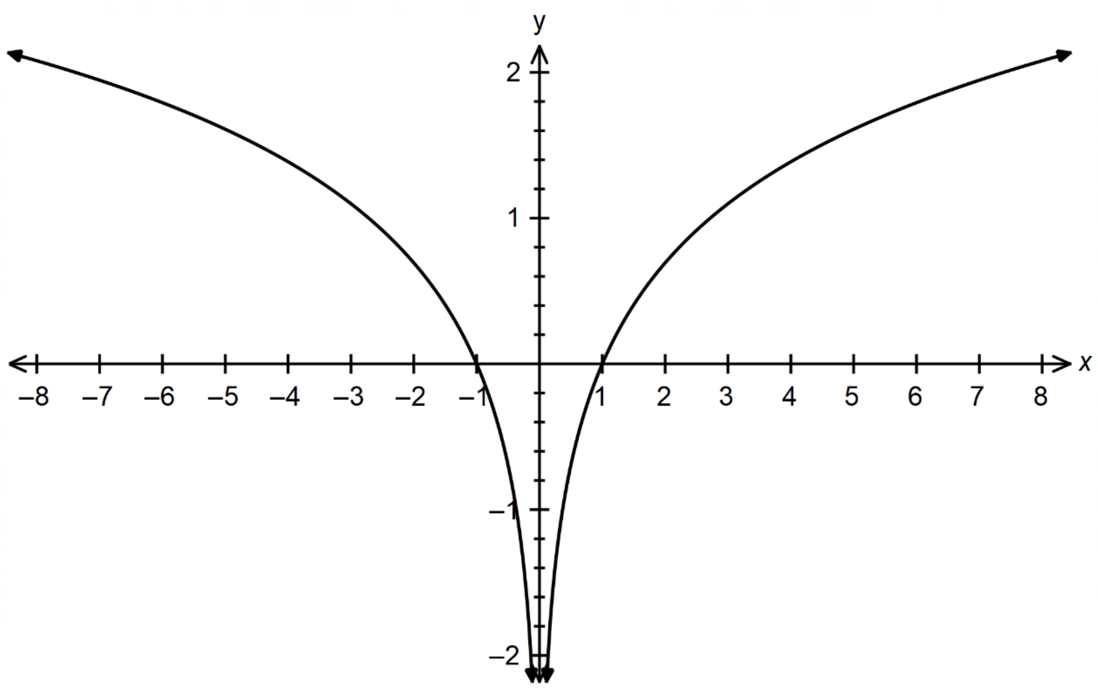
10.1 Skets die volgende funksies en dui die *x*-afsnitte aan:

(a) $y = |\sin 2\theta|$ vir $\theta \in [0;\pi]$



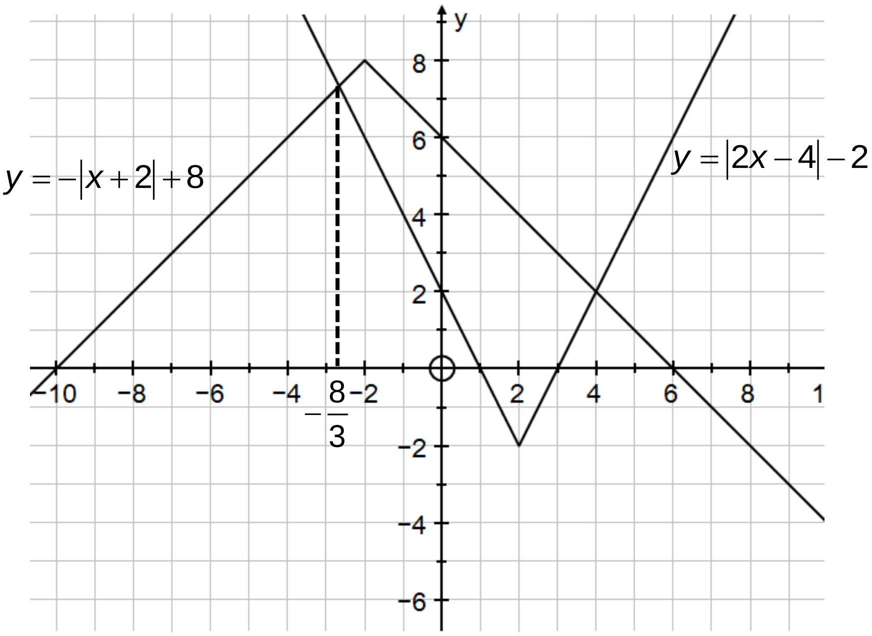

(b) $y = \ln|x|$

absolutewaarde-effek



10.2 Gebruik die grafieke op die geskaalde asse hieronder, of andersins, om die gegewe ongelykhede op te los:




(a) $|2x-4|\leq 8$

$|2x-4|-2\leq 6$

$\therefore -2\leq x\leq 6$ (uit grafiek)

(b) $2|x-2|+|x+2|\leq 10$

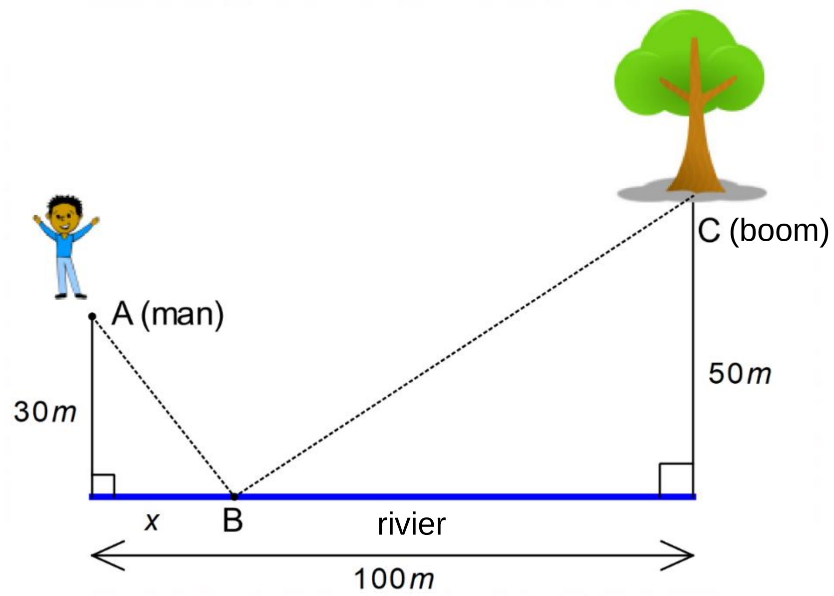
$\therefore |2x-4|-2\leq -|x+2|+8$

$\therefore -\frac{8}{3}\leq x\leq 4$

## VRAAG 11

11.1 'n Man staan 30 m weg van 'n reguit rivier. 100 m stroomaf is daar 'n boom wat 50 m van die rivieroewer af is. Hy wil na die rivier toe stap om te drink en dan na die boom om in die skaduwee te rus. Hy stap in reguitlyne soos uitgebeeld deur die stippellyne in die diagram.




(a) Toon dat die afstand wat hy sal stap, gegee word deur die uitdrukking:

$$d=\sqrt{x^2+900}+\sqrt{x^2-200x+12500}$$

afstand na rivier $=\sqrt{x^2+30^2}=\sqrt{x^2+900}$ (Pythagoras)

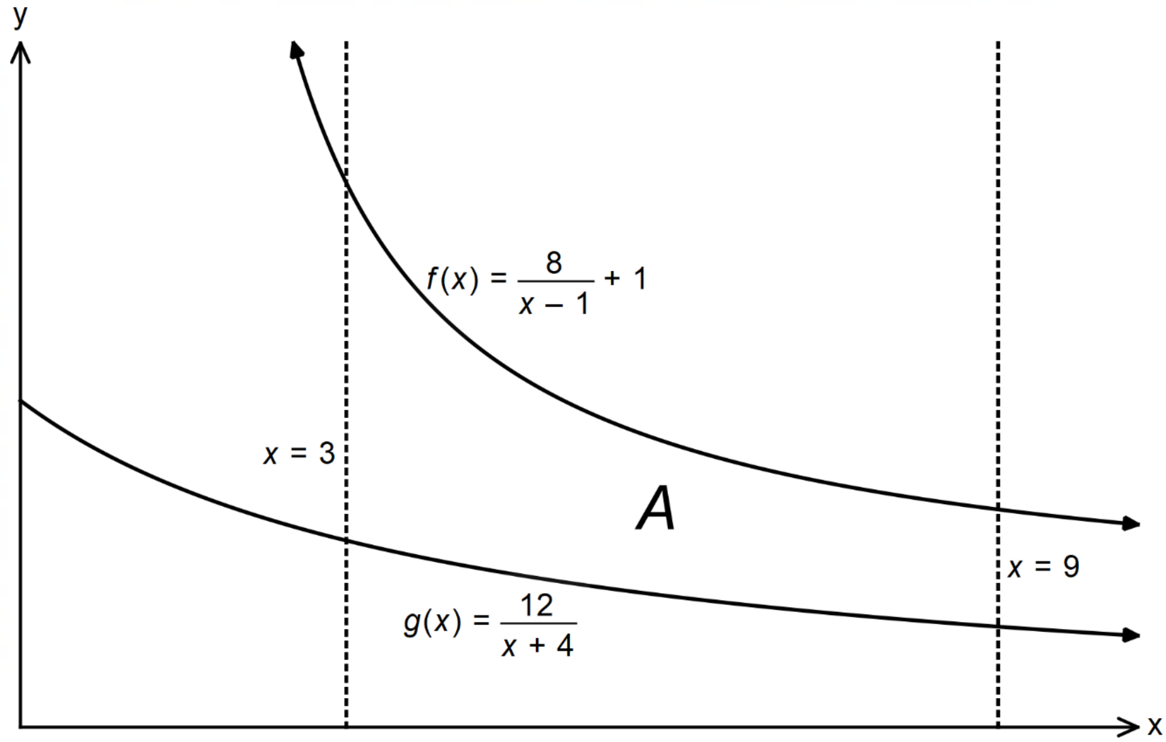
afstand na boom $=\sqrt{(100-x)^2+50^2}=\sqrt{x^2-200x+12500}$ (Pythagoras)

totale afstand gestap $=\sqrt{x^2+900}+\sqrt{x^2-200x+12500}$

(b) Bepaal vervolgens die waarde van $x$ wat die afstand $d$ sal minimaliseer.

$$d=\sqrt{x^2+900}+\sqrt{x^2-200x+12500}$$
$$d=\left(x^2+900\right)^{\frac{1}{2}}+\left(x^2-200x+12500\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\therefore \frac{dd}{dx}=\frac{1}{2}\left(x^2+900\right)^{-\frac{1}{2}}(2x)+\frac{1}{2}\left(x^2-200x+12500\right)^{-\frac{1}{2}}(2x-200)=0$$
$$\therefore \frac{x}{\sqrt{x^2+900}}=-\frac{x-100}{\sqrt{x^2-200x+12500}}$$
$$\therefore \frac{x^2}{x^2+900}=\frac{x^2-200x+10\,000}{x^2-200x+12\,500}$$
$$\therefore x^4-200x^3+12500x^2=x^4-200x^3+10900x^2-180000x+9000000$$
$$\therefore 1600x^2+180000x-9000000=0$$
$$\therefore x=37.5m$$

11.2 Bepaal die oppervlakte gemerk A hieronder. Dit word aan die bokant begrens deur die kromme $f(x) = \frac{8}{x-1} + 1$, aan die onderkant deur die kromme $g(x) = \frac{12}{x+4}$, aan die linkerkant deur die lyn $x = 3$ en aan die regterkant deur die lyn $x = 9$. Jy moet die uitdrukking toon wat die integrale behels wat jy gebruik om jou antwoord te bereken.




– bepaalde integraal

$A = \int_3^9 \frac{8}{x-1} + 1 - \frac{12}{x+4}\,dx$ – trek funksies af – korrekte funksies

$= \left[8\ln|x-1| + x - 12\ln|x+4|\right]_3^9$ – gebruik ln

$= 8\ln 8 + 9 - 12\ln 13 - 8\ln 2 - 3 + 12\ln 7$

$= 9{,}66$ eenhede$^2$

## VRAAG 12

12.1 Bepaal die volgende:

(a) $\int \sin 5x \cos 4x \, dx$

$= \int \frac{1}{2}\sin 9x + \frac{1}{2}\sin x \, dx$

$= -\frac{1}{18}\cos 9x - \frac{1}{2}\cos x + c$

(b) $\int xe^x \, dx$

$= xe^x - \int e^x dx$ – stuksgewys – keuse van f en g'

$= xe^x - e^x + c$

(c) $\int e^{\tan 2x} \sec^2 2x \, dx$

$= \frac{e^{\tan 2x}}{2} + c$

(d) $\int \frac{x^3 - 3}{x^2 - 1} dx$

$x^3 - 3 = x\left(x^2 - 1\right) + x - 3$ – parsieelbreuke

$\therefore \frac{x^3 - 3}{x^2 - 1} = x + \frac{x - 3}{(x-1)(x+1)} = x + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = x - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$

$\therefore \int \frac{x^3 - 3}{x^2 - 1} dx = \int x - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} dx$

$= \frac{x^2}{2} - \ln|x-1| + 2\ln|x+1| + c$

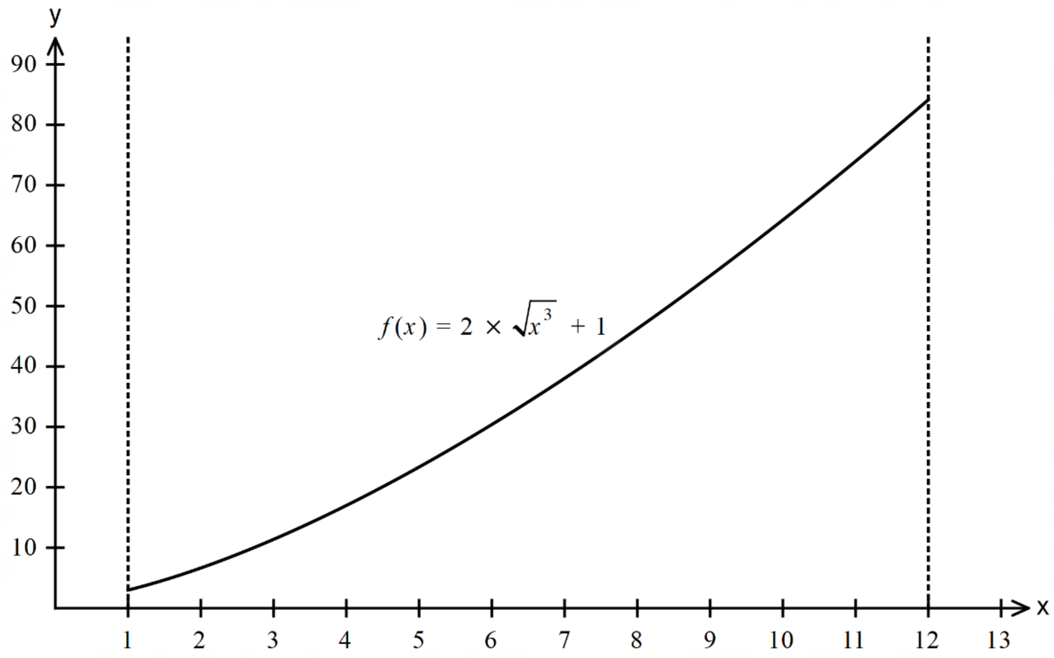
12.2 Die booglengte van 'n funksie $f(x)$ van $x = a$ na $x = b$ word gegee deur die formule:

$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$.

Die funksie $f(x) = 2\times\sqrt{x^3}+1$ word gegee.

Gebruik hierdie formule om die booglengte van $f\ x$ tussen $x = 1$ en $x = 12$ te bepaal soos hieronder geïllustreer.

Jy moet die integraal toon wat jy gebruik om jou antwoord te bereken.




$f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 1$

$\therefore f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$

$\therefore (f'(x))^2 = 9x$

$L = \int_1^{12} (1+9x)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= \left[\frac{2}{27}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{12}$

$= 81{,}95$ *eenhede*

**Totaal: 200 punte**