GRAAD 12-EKSAMEN
NOVEMBER 2016

GEVORDERDEPROGRAM-WISKUNDE: VRAESTEL I
MODULE 1: CALCULUS EN ALGEBRA

NASIENRIGLYNE

Tyd: 2 uur 200 punte

Hierdie nasienriglyne is opgestel vir gebruik deur eksaminators en sub-eksaminators van wie verwag word om almal 'n standaardiseringsvergadering by te woon om te verseker dat die riglyne konsekwent vertolk en toegepas word by die nasien van kandidate se skrifte.

Die IEB sal geen bespreking of korrespondensie oor enige nasienriglyne voer nie. Ons erken dat daar verskillende standpunte oor sommige aangeleenthede van beklemtoning of detail in die riglyne kan wees. Ons erken ook dat daar, sonder die voordeel van die bywoning van 'n standaardiseringsvergadering, verskillende vertolkings van die toepassing van die nasienriglyne kan wees.

VRAAG 1

1.1 (a) $x > -3$ $x + 3 + 2x = 4$ $x < -3$ $-x - 3 + 2x = 4$

$\therefore 3x = 1$ $x = 7$

$\therefore x = \frac{1}{3}$ NVT (7)

(b) $\dfrac{x^2}{8} = \dfrac{1}{2}$

$x = \pm 2$ (4)

(c) $2lnx - \dfrac{3}{ln\,x} = 1$ $k = lnx$

$2k^2 - k - 3 = 0$

$k = 1{,}5$ $k = -1$

$x = e^{1{,}5}$ $x = e^{-1}$ (8)

1.2 Definisiegebied: $e^2 - x^2 > 0$ d.w.s. $-e < x < e$

Waardegebied: maksimum waarde = lne^2 = 2 $y \leq 2$ (8)

[27]

VRAAG 2

2.1 $i^4 = 1$

$\sqrt{1} = 1$ (2)

2.2 $(a + 3i)(3 + 2i) = bi$

$3a + 2ai + 9i - 6 = bi$

Vergelyk reëel: $3a - 6 = 0$ = 0

$a = 2$

Vergelyk imaginêr: $2a + 9 = b$

$b = 13$ (7)

2.3 $x = q - \sqrt{3}i$ is ook 'n wortel

Som van wortels = $2q = 2$

$q = 1$

Produk wortels = $q^2 + 3 = p$

$p = 4$

OF

$x - q = -\sqrt{3}i$

$x^2 - 2qx + q^2 + 3 = 0$

$\therefore q = 1$ $p = 4$ (7)

[16]

VRAAG 3

3.1 (a) Waar
(b) Onwaar
(c) Onwaar
(d) Onwaar
(e) Waar
(f) Waar (12)

3.2 Kontinuïteit:

$$\lim_{x \to 2^-} \left(p - x^2 \right) = \lim_{x \to 2^+} \left(qx + 10 \right)$$

$$p - 4 = 2q + 10$$

$$p = 2q + 14$$

Gradiënte gelyk:

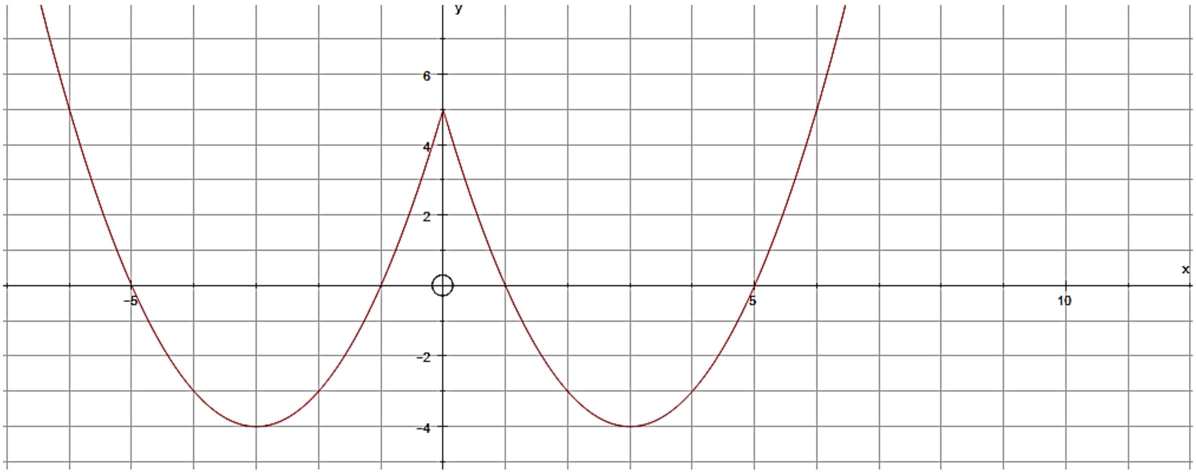
$$-2x = q \qquad \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} f'(x)$$

$$q = -4 \qquad p = 6$$ (8)

3.3 (a)

(5)

(b) Vorm



(8)

[33]

VRAAG 4

Bewys waar vir $n = k + 1$

$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\text{LK} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k+1}{k+2} = \text{RK}$

[10]

VRAAG 5

5.1 Oppervlakte van driehoek AOC $= \frac{1}{2} r\sin\theta \cdot r\cos\theta$

$= \frac{1}{2} r^2 \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}r^2}{8}$ (6)

5.2 Oppervlakte sektor AOB $= \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\pi r^2}{12}$ (4)

5.3 Verlangde oppervlakte $= \frac{\pi r^2}{12} - \frac{\sqrt{3}r^2}{8} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{6}$

$\therefore 2\pi r^2 - 3\sqrt{3}r^2 = 8\pi - 12\sqrt{3}$

$\therefore r^2 = 4 \ \ dws \ \ r = 2$ (6)

[16]

VRAAG 6

6.1 B
6.2 E
6.3 C
6.4 D

[12]

VRAAG 7

$$3x^2 - 4y \cdot \frac{dy}{dx} = -4$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+4}{4y}$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4$$
$$\therefore y - 1 = 4(x-2)$$
$$\therefore y = 4x - 7$$

[11]

VRAAG 8

8.1 Aangesien 2,1 naby aan 'n draaipunt is, is die gradiënt van die raaklyn vlak en die raaklyn sal die x-as verby D tref. Die raaklyn sal dan neig na D. (3)

8.2 $x \neq -2$, $x \neq 2$, $x \neq 4$ (enige twee) (2)

8.3 $$x_{r+1} = x_r - \frac{\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 16x - 12}{x^3 - 4x^2 - 4x + 16}$$

$x_0 = 3$
$x_1 = 3,45$
$x_2 = 3,464006$
$x_3 = 3,464102$

(8)
[13]

VRAAG 9

9.1 $$f'(x) = 1 - 8(x+1)^{-3}$$
$$0 = 1 - \frac{8}{(x+1)^3}$$
$$\therefore x + 1 = 2$$
$$\therefore x = 1 \quad \text{and} \quad y = 2$$
$$f''(x) = 24(x+1)^{-4}$$
$$\therefore f''(1) = \frac{3}{2} > 0$$
$$\therefore min$$ (10)

9.2 $f(x) = x + \frac{4}{(x+1)^2}$

As $x \to \pm\infty$ $f(x) \to x$

$\therefore y = x$ (2)

9.3 $\int_{-p}^{p} x + 4(x+1)^{-2}\, dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - 4(x+1)^{-1}\right]$

$= \frac{p^2}{2} - \frac{4}{p+1} - \frac{p^2}{2} + \frac{4}{-p+1}$

$= \frac{8p}{1-p^2}$ (6)

[18]

VRAAG 10

10.1 (a) $\int x + 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}\, dx$

$= \frac{x^2}{2} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} + C$ (7)

10.1 (b) $\frac{1}{2}\int 2\tan^5(2x)\cdot\sec^2(2x)\, dx$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\tan^6(2x)}{6} + \text{C}$

$= \frac{\tan^6(2x)}{12} + C$ (8)

10.1 (c) $\int x.(2-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$

Laat $u = x$ $du = 1$

$dv = (2-x)^{-\frac{1}{2}}$ $v = -2(2-x)^{\frac{1}{2}}$

$= x.[-2(2-x)^{\frac{1}{2}}\} - \int -2(2-x)^{\frac{1}{2}}.1\, dx$

$= -2x\sqrt{2-x} - \frac{4(2-x)^{\frac{3}{2}}}{3} + \text{C}$ (9)

10.2 $a = -1$ en $b = 2$

$f(x) = 2x^2 + 1$ (7)

[31]

VRAAG 11

11. Oppervlakte = lengte × breedte $= \frac{x}{x^2+4}$

$\frac{dA}{dx} = \frac{(x^2+4)\cdot 1 - x(2x)}{(x^2+4)^2}$

$0 = x^2 + 4 - 2x^2$

$\therefore x = 2$

$\therefore Oppervlakte = \frac{2}{4+4} = \frac{1}{4}$

[13]

Totaal: 200 punte